



Мы должны думать не о том, что может пригодиться, а о том, без чего не сможем обойтись
Джером К. Джером

Теория информации

ЛЕКЦИЯ 2: ПОНЯТИЕ ИНФОРМАЦИЯ В ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ, БИОЛОГИИ И СОЦИАЛЬНЫХ НАУКАХ

15 сентября
2022

Что обсуждали на прошлой лекции – информации как мера

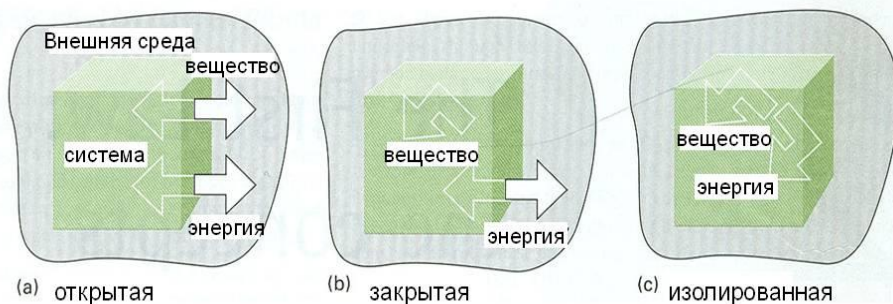
- **снятой неопределенности**, которая сопоставляет вероятностную веру некоторому событию, связанному с получением сообщения (т.е. $I = -\log_2 p$, где p – вероятность произошедшего «события» - вероятностная концепция) – К. Шеннон
- **сложности**, которая измеряется минимальной длиной компьютерной программы (количеством команд), с помощью которой можно преобразовать один объект (множество) в другой (множество). - ак. А. Н. Колмогоров
- **разнообразия объективного существования объектов, создающих неоднородность (разнообразия или изменений)** в распределении распределения энергии и вещества. - ак. В.М. Глушков
- **числа** N сообщений длиной m символов, содержащихся в алфавите из n символов, ($I = \log_2 N$, где $N = m^n$) – Ральф Хартли (1928 - 1982 гг.)
- мера **целесообразности** информации P_0 – вероятность достижения цели до получения информации, P_1 – вероятность достижения цели после получения и использования информации ($I = \log P_0/P_1$) - А. А. Харкевич (1904- 1965 гг.)

Что обсудим на этой лекции

- Энтропия и **информации** с точки зрения физики (физическая, термодинамическая,...)
- Энтропия и **информации с точки техники** (информационная, **it from bit**)
- Феномен информационного взаимодействие в биологии и социальных науках– **difference that make the difference**

Начнем «классических» определений

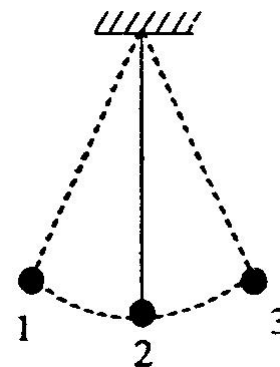
Типы термодинамических систем



Энергия системы - это ее способность совершать работу

7

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$



dS – изменение энтропии
 dQ – изменение тепла
 T – температура

Энтропия системы (от др.-греч. ἐν «в» + τροπή) суть - «обращение; превращение» энергии. Энтропии бывают разные: в физике - характеризует меру сложности, хаотичности или неопределённости состояния системы, в термодинамике - характеризует меру необратимой диссипации энергии, в статистической физике - характеризует вероятность осуществления какого-либо макроскопического состояния.

Энтропия vs информация

- Как утверждает второй закон термодинамики (или H-теорема Больцмана), энтропия замкнутой системы $\Delta S_T = \Delta Q/T$ не может уменьшаться со временем.
- Однако термодинамическая энтропия может **изменяется** из-за обмена теплом ΔQ между системой и **внешним резервуаром**. При этом **информация** о состоянии системы может конвертироваться в **энтропию** ΔS_S это т.н. (информационную энтропию)

По формуле Хартли $\Delta S_S = i$, где

$$i = \log_2 N \quad (1)$$

где N — мощность алфавита i — количество информации в каждом символе сообщения

или **информационную энтропию** Шеннона, которая равна $\Delta S_S =$

$$H(x) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i. \quad (2)$$

где n — число переменных, которые принимают значения x_i с вероятностью p_i

Информационная энтропия – мера среднего количества информации, которое содержится в символе сообщения

Формула Шеннона позволяет вычислить **математическое ожидание (среднее)** «количества информации», т.е.

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x)$$

содержащегося в одной цифре (элементе кода передаваемого сообщения) – бит/символ. Поэтому, если сообщения А, В имеют одинаковое распределение вероятностей символов (элементов), то энтропия этих сообщений одинакова

- $H(X)=H(Y)$ (3)

Энтропия связанности символов в сообщении

взаимная энтропия (бит/два символа)

$$H(AB) = H(A) + H(B | A) = H(B) + H(A | B). \quad (4)$$

(взаимная энтропия описывает неопределённость на пару символов: например, отправленного и полученного)

- При этом всегда для $f(g_i) = \log_2 g_i$, и $g_i = 1/p_i$

$$H(X) = -\mathbb{E}(\log_2 p_i) = \sum_{i=1}^n p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = \sum_{i=1}^n p_i f(g_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^n p_i g_i\right) = \log_2 n \quad (5)$$


т.е. энтропия переменных, имеющих «равномерное распределение», максимальна

Информационная энтропия и термодинамический предел - формула Ландауэра

- Итак, энтропия Шеннона выражает неопределенность (неуверенность) реализации случайной переменной. Другими словами, энтропия является **разницей** между **информацией, содержащейся в сообщении**, и той частью **информации**, которая **точно известна** (т.е. **уверенно** предсказуема) в сообщении. Можно сказать, что энтропия источника данных равна **среднему числу битов** на один элемент данных (символ), требуемых для их кодирования этих данных без потери информации при передаче.
- Если состояние бита заранее неизвестно, то есть с одинаковой вероятностью может равняться 0 или 1, **информационная энтропия равна $\Delta S_S = k \cdot \ln 2$** , а при стирании информации (переведении бита в конкретное состояние, например, в 0) она падает до нуля. **В результате получается, что при стирании информации энтропия ΔS_S уменьшается.** Поскольку суммарная энтропия уменьшиться не может: $S = Q/T + \Delta S_S \geq 0$, то получается, что вычислитель должен **передать резервуару тепло**
 - $Q \geq k \cdot T \cdot \ln 2$ (6)

Фундаментальная роль «неопределенности» в модели «физической реальности»

Если у нас есть распределение вероятностей того, где находится частица, оно описывается "состоянием«

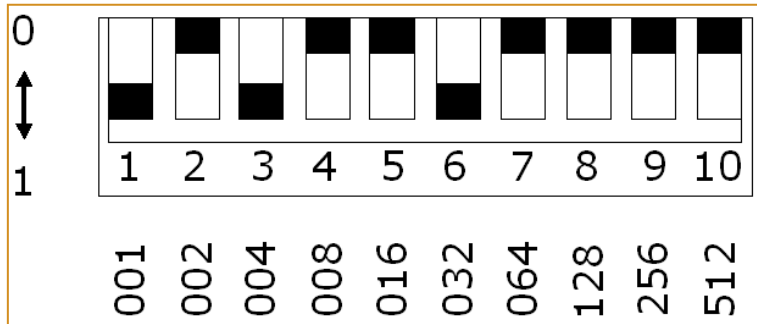
$$\sum_x \rho(x) |x\rangle$$


Функция плотности вероятности – измеряет вероятность того, что частица (символ) находится в определенном месте. В общем случае его волновая функция квантовой частицы имеет вид

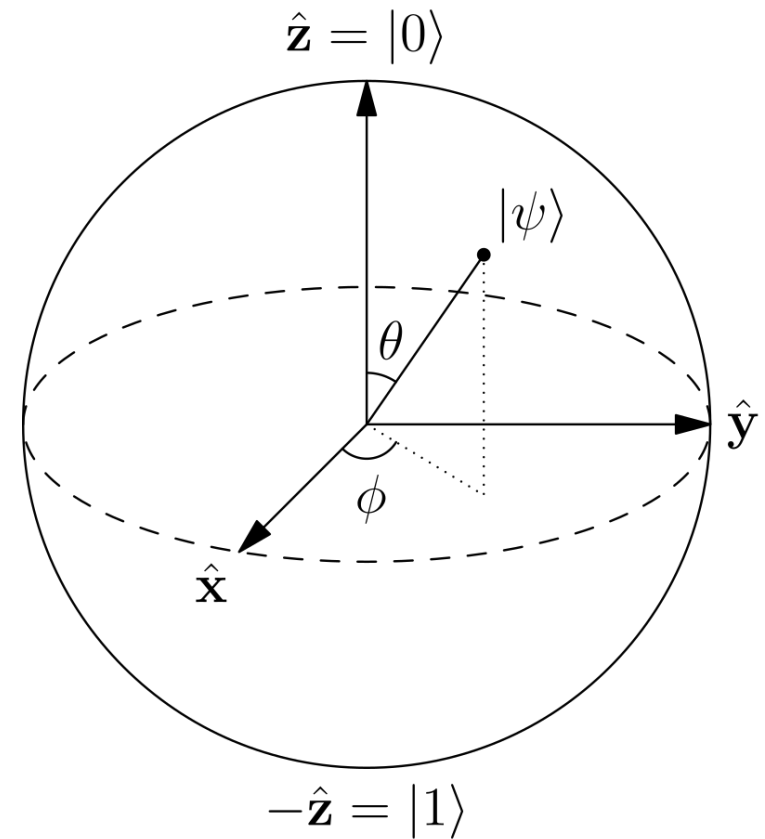
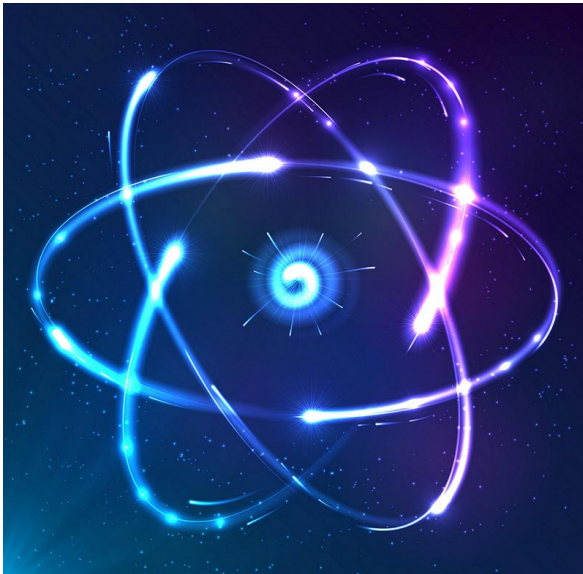
$$c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle$$

где c_0, c_1 – амплитуды вероятностей (комплексные числа)
 $|c_0|^2$ – вероятность того, что частица находится в состоянии $|0\rangle$ или $|1\rangle$

Неопределенность: бит vs кубит



Двоичный битовый регистр



Фундаментальная проблема - «квантовая» реальность

- Кубиты – квантовые биты, можно рассматривать как **тепловые машины**, выделяющие тепловую энергию при стирании информации, но для них формула Ландауэра не работает, поскольку квантовые системы могут находиться одновременно в **суперпозиции сразу нескольких состояний**, и понятия энтропии, энергии и температуры необходимо переопределять.
- Состояние квантовой системы задается с помощью матрицы **плотности вероятности ρ** , которая описывает, с какой вероятностью система находится в некотором **состоянии**.
- «Смешанные состояния» в русских сказках описываются фразами **«долго ли коротко ли»**, **«видимо – невидимо»** или как у кота Шрёдингера - **«ни жив» ни мертв»**. Если смешанных состояний нет, то матрица принимает диагональный вид и сводится к обычному набору вероятностей p_i — скажем, кота Шредингера можно описать набором «с вероятностью 0,75 кот жив, а с вероятностью 0,25 мертв», — однако в квантовых системах возможны более сложные конфигурации (**кот ни «жив» ни «мертв»**).
- С помощью ρ можно вычислить среднее значение величины, задаваемой оператором \hat{A} - информационную **энтропию фон Неймана** можно записать

$$\hat{A} = \ln[\rho] \quad (7).$$

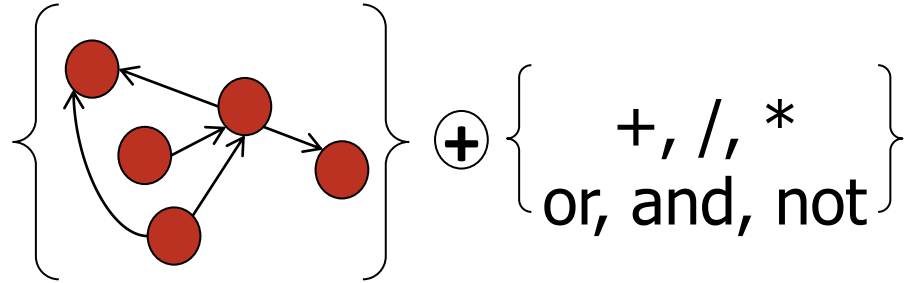
Квантовая информация

- В квантовых системах суть принципа Ландауэра не меняется, т.е.
 - количество теплоты (определяется по числу фононов, которые отвечают колебаниям квантовых частиц), выделяемой при стирании одного бита, ограничено снизу,
- но необходимо учитывать так называемую
 - взаимную энтропию между вычислителем и резервуаром D ,
 - изменение свободной энергии резервуара I .
- «квантовое неравенств Ландауэра» зависит от 4-х переменных (Q , S , D , I) и характеризует количество тепла, которое получает резервуар. Это количество действительно пропорционально температуре и изменению энтропии вычислительной системы.

Подходы к организации обработки информации о физических объектах

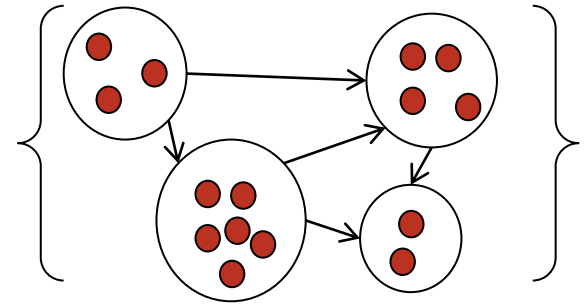
1

Физический мир – это **логико-алгебраическая система**: множество объектов и операций над объектами



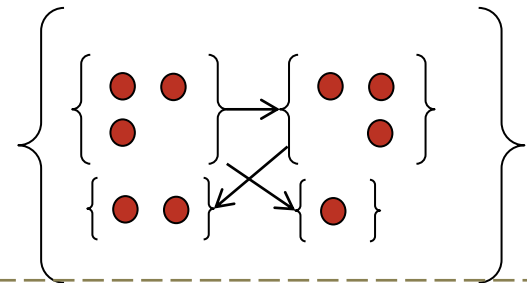
2

Физический мир – это **частичная алгебраическая система**: совокупность подмножеств. Внутри подмножеств действуют свои операции. Модель строится с помощью операций над wybranнми подмножествами.



3

Физический мир – объединение алгебраических подсистем и мета-операций. Внутри «малых» подсистем объекты неразличимы.



партитура



музыкант



инструмент



звуки музыки



слушатели



Дискретность vs непрерывность как свойства физической реальности – it from bit

квантовая реальность

описание в терминах функций (структур) в пространстве состояний

\ni

физическая реальность

описание в терминах математических операций и переменных-объектов

операции над объектами
- классическая математика

операции над структурами
- «теория» информации

физика

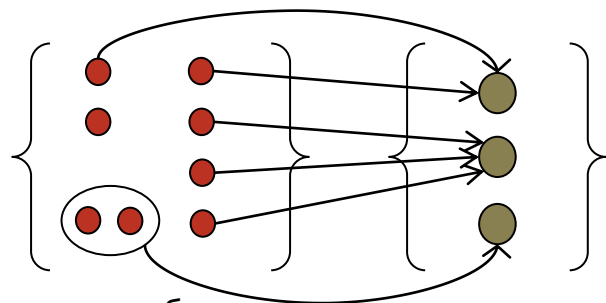
это что

вычисления

это как

информация

это что



объекты физической реальности

классы объектов носители алгебр и моделей

Физика – это гомоморфный образ объектов реального мира, который рассматривается с точки зрения свойств **однородности, делимости и аддитивности**



Что имеет место: Если «большие» системы A и B физически делимы, то (проявляется свойство делимости и однородности) «математические» операции над моделью C адекватно отображают свойства «большой» системы A+B. Однако, существуют физические объекты, которые находятся в «связанном» состоянии.

1. Все, что имеет структуру физического объекта (разделяется на части и образует «булеву структуру» на основе закона исключенного третьего), может быть вычислено.
2. Физическую реальность можно измерить с точностью «до достоверности», но для «физических координат» имеет место неравенство Гейзенберга
 $\Delta t \cdot \Delta E \geq \hbar$, т.е. t и E одновременно не $\in R$ - физическому пространству (реальности)
3. «информация» — это атрибут реальности, которая не имеет булеву структуру, поэтому может быть описана с помощью аппарата теории вероятности + теория категорий

Вход		Выход
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Вход		Выход
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Количество информации по Шеннону $I = -\sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i$

Пусть на входе гейта имеется 4 равновероятных состояния

Тогда, входная информационная емкость гейта $I_{in} = 2$ бита

На выходе гейта: состояние 0 появляется с вероятностью $3/4$,
а состояние 1 - с вероятностью $1/4$

Выходную информационную емкость гейта можно оценить

$$\begin{aligned} \text{так: } I_{out} &= -[(3/4)\log_2(3/4) + (1/4)\log_2(1/4)] = \\ &= -[(3/4)\log_2 3 - (3/4)\log_2 4 - (1/4)\log_2 4] = \\ &= -(3/4)\log_2 3 + 2 \end{aligned}$$

Потерянная информация $(I_{in} - I_{out}) = (3/4)\log_2 3 = 1.1887$ бит

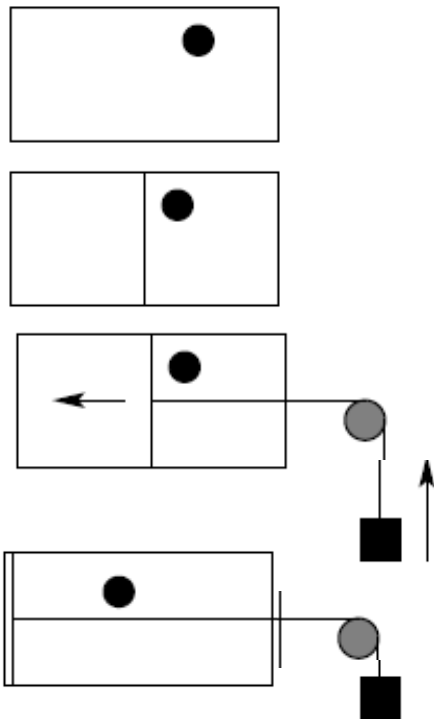
Выделенная при этом энергия:

$$\Delta E = kT \ln 2 \cdot (I_{in} - I_{out}) = kT \ln 2 (3/4) \log_2 3 = 0.824 kT$$

Пример. Принцип Ландауэра и демон Максвелла



Есть ящик с "одномолекулярным" газом и Демон (Д) – интеллектуальное устройство, способное измерять, хранить и использовать информацию.



Сначала положение молекулы неизвестно.

Д ставит перегородку, делящую ящик пополам, и **определяет**, в какой половине находится молекула.

В зависимости от результата измерения, Д размещает в ящике поршень с грузом таким образом, чтобы удары молекулы его поднимали. Газ «расширяется» и совершает работу.

При постоянной температуре $\Delta A = kT \ln(V_2/V_1) = kT \ln 2$.

После того, как поршень сдвинулся и груз был поднят, его удаляют.

Система вернулась к исходному состоянию... но будет совершена работа за счет теплового резервуара при **постоянной температуре**.

Нарушено второе начало термодинамики?

Нет: Демон для этого был наделен памятью, в памяти осталась информация о состоянии ячейки, которой в начале цикла не было.

Если вернуть систему к исходному состоянию – значит надо стереть информацию в памяти Демона для чего затратить энергию $kT \ln 2$.

Если память "демона" Максвелла явно в состав системы не включать, но можно учесть "знание" о системе в описании ее состояния можно так:

полученное от резервуара количество **теплоты** ↓

Произведенная механическая работа $\Delta A = kT \ln 2 = \Delta Q = T\Delta S$

↓
изменение термодинамической **энтропии** ячейки

Работа, затраченная на стирание информации равна $\Delta A_e = -kT \ln 2$

Полная совершенная в процессе работа $\Delta A + \Delta A_e = T\Delta S - kT \ln 2 = T\Delta S_g$
где $\Delta S_g = \Delta S - k \ln 2 = 0$

Можно сохранить обычное выражение для второго закона термодинамики ($T\Delta S \geq 0$ в замкнутом цикле), если ввести **эффективную энтропию** системы

$$\Delta S_g = \Delta S - k \ln 2 = \Delta(S + S_i)$$

S – **термодинамическая энтропия**, зависящая только от ее состояния

S_i зависит от того, что знает о системе наблюдатель: **информационная энтропия**
где $S_i = -k \ln 2$ (на один бит). Наличие информации о системе может быть учтено, если рассматривать эффективную энтропии системы.

Если **информация** включается в общее **описание состояния системы** наравне с ее физическими параметрами, то оказывается, что

- Одна и та же система **имеет различные физические свойства** в зависимости от имеющейся информации (в одном случае она способна совершить работу, в другом – нет)
- Мера **информации** оказывается согласованной с общефизическими **понятиями энергии и энтропии**
- «Обращение» принципа Ландауэра (не стирание, а получение бита информации): любая неслучайная комбинация битов может быть использована для **производства работы**.
- Информация как объективное описание состояния системы наравне с ее физическими параметрами меняет ее свойства. Т.е. в зависимости от имеющейся информации о системе систему можно или нельзя использовать для совершения работы. (в одном случае система способна совершить работу, в другом – нет)

Любая информация есть совокупность состояний бинарных элементов:
нулей и единиц

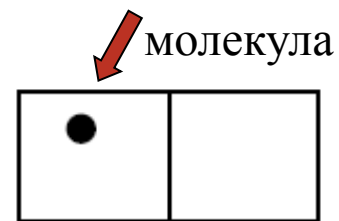
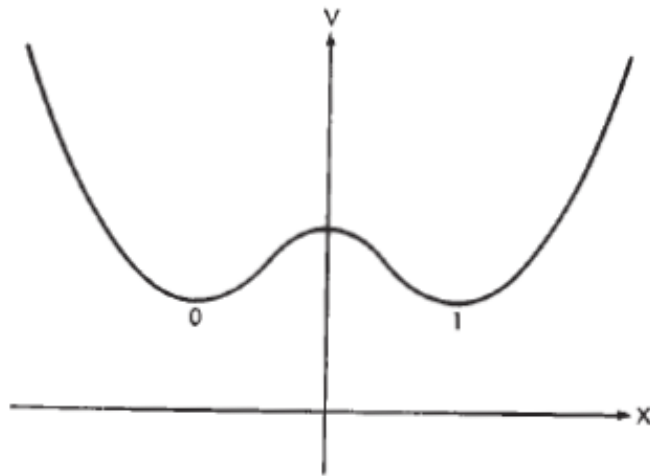
Пример: числовая информация $a_0 2^0 + a_1 2^1 + a_2 2^2 + \dots + a_{n-1} 2^{n-1} = \underbrace{\{a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0\}}_{n \text{ разрядов}}$

$$5 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = \{101\} \quad n \text{ разрядов}$$

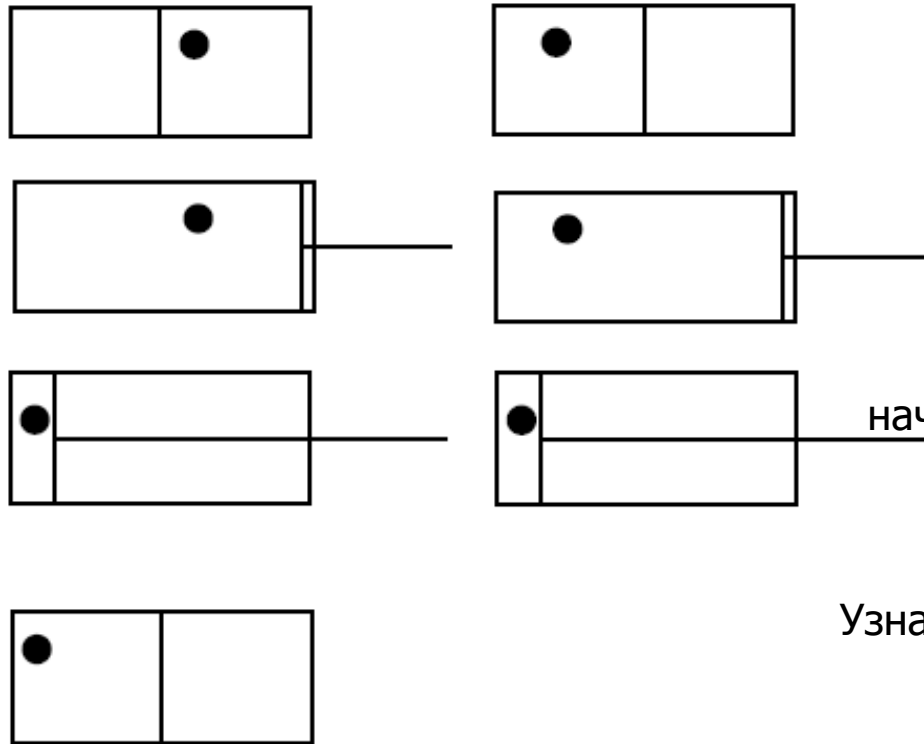
Реализация бинарных элементов: любая **Физическая** система с двумя устойчивыми состояниями

Потенциальная энергия

Обобщенная модель системы
включает потенциальные
барьеры (стенки)



Основные операции с мерой информации: запись (копирование) и стирание



Битовая ячейка
в одном из двух состояний

Удаляется перегородка
вставляется поршень

Поршень сдвигается так, что независимо от
начального состояния молекула оказывается в
левой половине

Перегородка восстанавливается
Узнать, где была молекула раньше, невозможно

Информация потеряна! В процессе стирания поршень совершает работу;

$$\Delta E = kT \ln(V_1/V_2) = kT \ln 2$$

Соответствующее количество теплоты передается в среду

Энтропия окружающей среды возрастает на $\Delta S = \Delta E/T = k \ln 2$

Энтропия однобитовой ячейки уменьшается на ту же величину $\Delta S = \Delta E/T = k \ln 2$

Фактически энтропия и информация – это одна и та же величина, но измеренная в других единицах.

$$S = -k\sum p_i \ln p_i = k \ln 2 \cdot (-\sum p_i \log_2 p_i) = k \ln 2 \cdot I_T$$

количество "отсутствующей" информации о термодинамическом состоянии
(то, что можно было бы извлечь, если знать состояние точно)

Отличие и информации в знаке. Информация о системе уменьшает ее энтропию.

Итак, энтропия есть **мера незнания** точного микросостояния системы

Система может совершать работу, если ее энтропия не максимальна.

Информация → меньше энтропия → больше возможности совершать работу

Вывод: За каждый бит можно получить до $kT \ln 2$ полезной работы

С точки зрения классической физики - суть информационного подхода

поиск отношения «код - физический процесс - работа»



Код физического
«процесса»



Сам физический
«процесс»

Основной вопрос: Всем ли физическим процессам и объектам природы отвечает информационный «код» (дескриптор) ?

Компьютеры с точки зрения термодинамики и теории информации

Будем рассматривать компьютеры – это тепловые машины, которые **потребляют энергию E** и совершают “работу” W , решая «вычислительную» задачу. Выполняя работу компьютеры рассеивают (т.е. выделяют) тепло Q в **окружающую среду**. Тепло есть теряемая «даром» энергия, которая равна разности между **потребляемой энергией** и совершаемой работой: $E - W = Q$. Это фундаментальное соотношение - суть **первого начала термодинамики**.

Вопрос: можно ли проводить вычисления и не тратить при этом энергию? т.е. $E=0$. Да, если добиться, чтобы $-W = Q$? Чтобы тепло полностью переходило бы в работу надо ... **не терять информацию о скорости** движения частиц **окружающей среды** (тепло преобразовать в работу без потерь нельзя - **второе начало термодинамики**). Если информация теряется, то выделяется **тепло**. Нижняя граница выделения тепла (потерь) равна (формула Ландауэра):

$$Q \geq k_B T \ln 2,$$

Полная энергия сохраняется.

первое начало термодинамики описывает закон сохранения энергии в системе,

второе начало характеризует то, как различные виды энергии могут трансформироваться в любые другие.

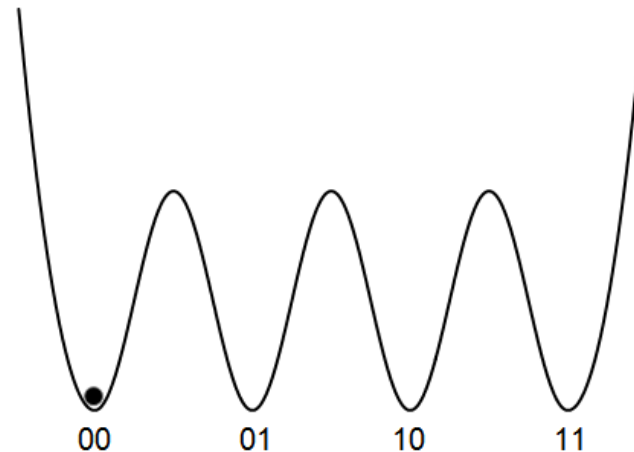
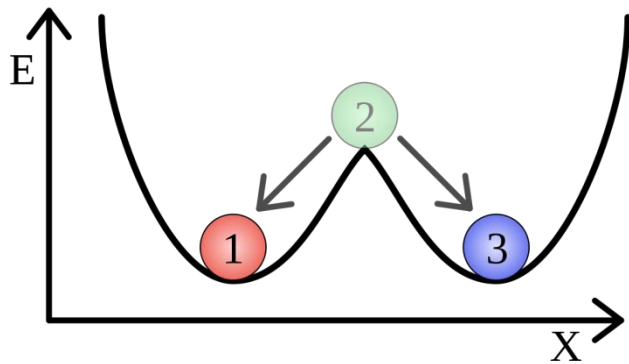
Вопрос: Какое это имеет отношение к информации ?

Из термодинамики следует, что тепло Q , полученное системой при температуре T , не может превысить изменения **энтропии системы ΔS** , умноженной на температуру,

$$Q \leq k_B T \Delta S$$

знак '=' для обратимых процессов

Цифровое вычислительное устройство состоит из частицы «в энергетически стабильном состоянии - потенциальной яме» с кодом состояния, например, «0» в состояние «1» (или наоборот). Чтобы изменить состояние надо:



1. **Придать** частице энергию, достаточную для преодоления энерго барьера.
2. **Отобрать** у частицы энергию для того, чтобы она зафиксировалась в новом положении.

Если используются обратимые вычисления, то **отбираемая** от частицы энергия передаётся следующему элементу в цепочке вычислений, но если вычисления необратимы, **излишек энергии д.б. рассеян** в окружающее пространство в виде не утилизируемой теплоты.

Заключение

- Человек - субъект воспринимающий **информацию** способный перевести ее в полезную работу, используя феномен «понимания» и сознания .
- Однако понимание/сознание как результат деятельности мозга человека не является объектом, который подчиняется законом классической и квантовой физики.
- Сознание - объективный феномен способный эффективно обрабатывать **информацию**, преобразуя ее в информационные структуры, отражающие опыт взаимодействия с реальностью. Информационные структуры затем могут физически воплощаться в объекты реальности – it from bit.
-