КАФЕДРА ТЕЛЕМАТИКА

Санкт-Петербургский
Государственный
Политехнический
Университет

Институт прикладной
математики и механики

Семинар на английском языке

Lecture 9

Modal logics, Probability and Relational (flickering) semantics

3.11.2022

Introduction

Modal logic is a collection of formal systems widely used to represent statements about necessity (необходимо) and possibility (возможно) .

Probability is the branch of mathematics concerning numerical descriptions of how likely (насколько вероятно) an event is to occur.

Main modal formula can be read as "if P is necessary, then It is also possible".

There are a range of different types of **modal logics**, all of which use a similar set of logical axioms and rules that applied to diverse range of topics: from time (temporal logic) to ethics (deontic logic), norms, and knowledge (epistemic logic).

Today we will discuss relational semantics (Kripke structure) and explain how it can be applied over several types of the modal logics.

Существует фундаментальное отличие между «незнанием» и «вероятностью»

Ключевое положение: От того, что вы «чего-то не знаете», совсем не значит, что «это что-то» случайное.

- Так, если вы не знаете решение уравнения — это не значит, что его решением с одинаковой вероятностью может быть любое число.
- Вероятность можно определить
  - как степень субъективной уверенности в истинности суждения, опираясь на теорему Байеса (1702-1761).
  - частота повторения события в длинной серии наблюдений
- Незнанию можно сопоставить
  - принцип максимума энтропии, который утверждает, что наиболее достоверным распределениями вероятностей состояний неопределенной среды с уверенностью можно выбрать такое распределения, которые максимизируют меру неопределенности (энтропию) «поведении» среды.

Modal statement (expression)

1. It snows in winter
2. It always snows in winter
3. Sometimes it snows in winter

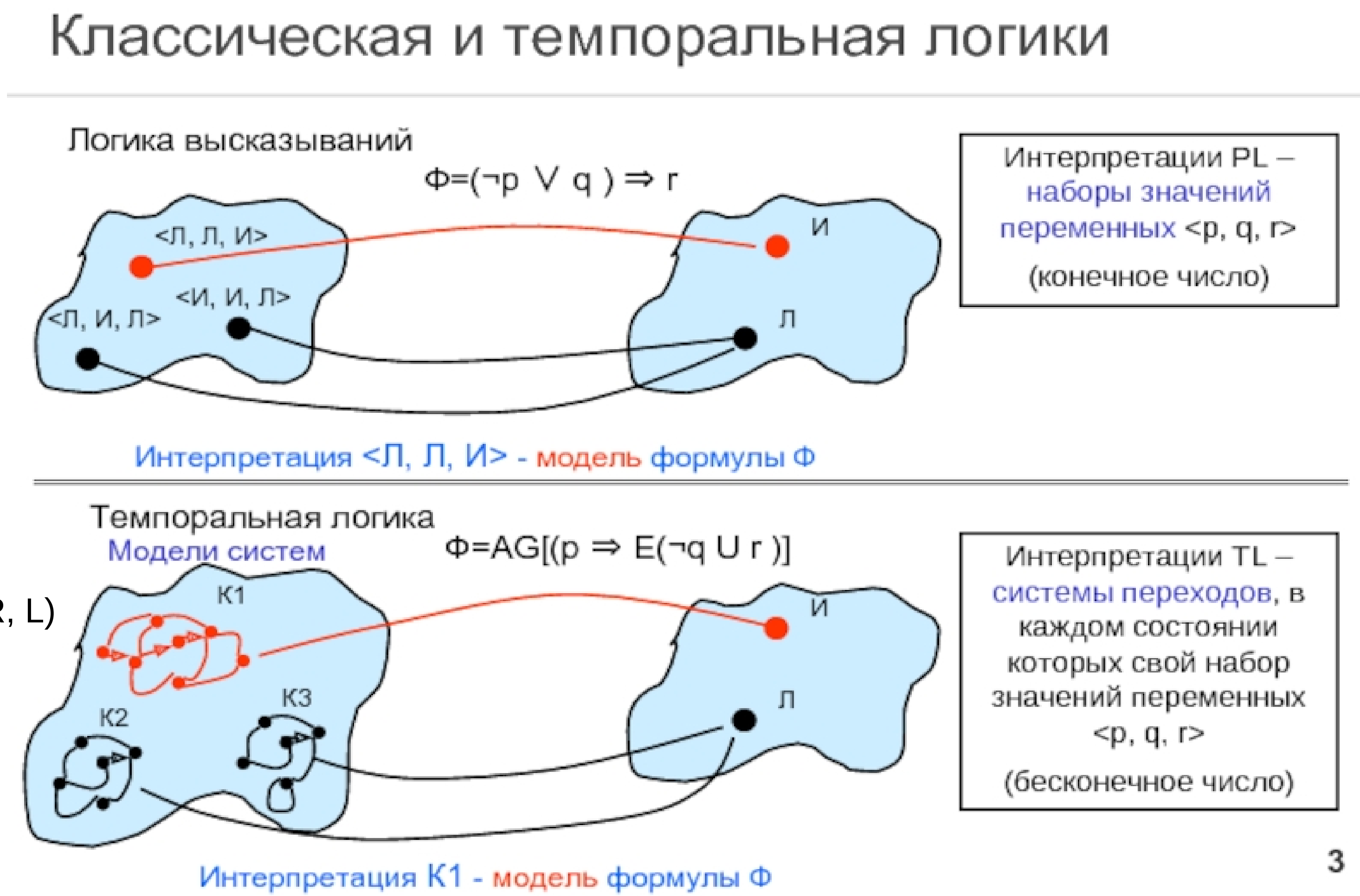
These are different statements. And therefore, they must be written in different formulas. These statements are meaningfully related to each other.

And this should be reflected in the formulas. Since statements differ only in words like - always, sometimes (modalities of time - temporal modalities), it is necessary to introduce some kind of logical constructions to express these modalities.

Example: classical vs modal (temporal) logic

операторы свойств: X –neXt time, U – Until, F – in the Future и

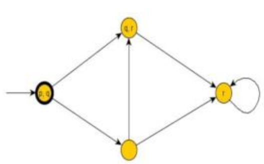
Кванторы «пути» : E- Exist, A - Always



К – структуры Крипке или

модель M=(S, S0, R, L)
базис:
EX, AF, EU

Структура Крипке



A – always (должно выполняться всегда), G – globally (истинно во всех будущих состояниях,
E – exists (существует хотя бы одна ветвь, на которой формула истина.

Пример

◇ (possible - возможно), □ (necessary - необходимо)

формула: M, s ⊧ p ⇔ E(s, p) = 1 , читается так: высказывание p истинно в мире s модели M)

M, w1 ⊧ ◇p (возможно)

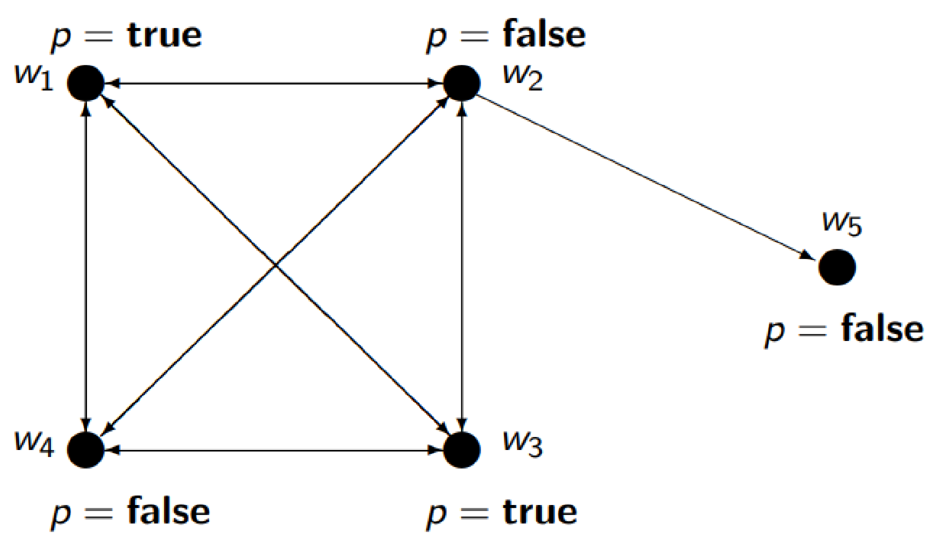
M, w1 ⊭ □p (необходимо)

M, w1 ⊧ □◇p

M, w5 ⊧ □p

M, w5 ⊭ ◇p

Модель Крипке



Примеры: deontic modalities - обязан, имею право

1. Students attend lectures
2. Students are required to attend lectures
3. Students have the right to attend lectures

deontic modalities: I must, I have the right…

Примеры: epistemic modalities - I know, I guess (знаю, предполагаю)

1. The problem has a solution
2. It is known that the problem has a solution
3. It can be assumed that the problem has a solution

epistemic modalities : I know, I guess

Modal logic

Modalities express different shades of truth (confidence-уверенность, necessity - необходимость, provability - доказуемость, awareness -осознанность

These shades can be classified:

Modalities of the necessary	Modalities of the possible
necessary - необходимо	possibly - возможно (алетическая логика)
always - всегда	sometimes - иногда (темпоральная логика)
must - должна	have the right - имею право (деонтическая логика)
know - знаю	guess - предполагаю (эпистемическая логика)
$\Box$	$\Diamond$

Modal Formula Syntax

To express modality we need to adds two logical operators:

□ (necessary - необходимого)

и

◇ (possible - возможного),

with the help of which, it is possible to construct formulas of the following form:

(□φ) «необходимо φ» - "necessary φ"

(◇φ) «возможно φ» - "possible φ"

Semantics of modal formulas

The semantics of modal formulas are diverse (or we may say – flickering)

Пример:

Дана формула □φ → φ

Если □ — модальность времени (темпоральная логика), «всегда», то

□φ → φ — это закон модальной логики.

Если студенты всегда ходят на лекции, то они ходят на лекции.

Если □— деонтическая модальность, «должны», то формула □φ → φ

не имеет статуса логического закона.

Если студенты должны ходить на лекции, то они ходят на лекции.

Это не всегда так !

Axioms

$\Box$ (necessary - необходимого) $\Diamond$ (possible - возможного),

1. $\Box\varphi \to \varphi$ (аксиома рефлексивности T) рефлексивные шкалы
   $\forall w R(w,w)$;

Если студенты **всегда (∀)** ходят на лекции, то они ходят (должны быть) на лекции.

модальность времени (темпоральная логика),

2. $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ (4)
   транзитивные шкалы $\forall w1 \forall w2 \forall w3 (R(w1,w2) \& R(w2,w3) \to R(w1,w3))$;
3. $\Diamond\Box\varphi \to \Box\varphi$
   симметричные шкалы $\forall w1 \forall w2 (R(w1,w2) \to R(w2,w1))$.
4. $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$ (D) (деонтическая логика)
   (If it should to be that *p*, then it is permitted that *p*)

Relational semantics

Lets introduce the satisfiability relation for modal formulas:

(Введем отношение выполнимости для модальных формул):

- Пусть P = {P1, P2, …} -- множество элементарных высказываний.
- Модальная интерпретация состоящая из шкалы Крипке
  - F<W, R> (W -- возможные “миры”, R -- отношение достижимости) и
  - оценки элементарных высказываний E: W x P -> {1, 0}.

Отношение выполнимости

Пусть M = <W, R, E> -- модель Крипке. Тогда отношение выполнимости $M, s \vDash p$ формулы p в мире s модели M определяется следующим образом:

1. Если p = Pi из множества элементарных высказываний, то:

   $M, s \vDash p \Leftrightarrow E(s, p) = 1$, (читается так: высказывание p истинно в мире s модели M)

1. $M, s \vDash p1 \wedge p2 \Leftrightarrow (M, s \vDash p1) \wedge (M, s \vDash p2)$
2. $M, s \vDash p1 \vee p2 \Leftrightarrow (M, s \vDash p1) \vee (M, s \vDash p2)$
3. $M, s \vDash p1 \rightarrow p2 \Leftrightarrow (M, s \nvDash p1) \vee (M, s \vDash p2)$
4. $M, s \vDash \neg p1 \Leftrightarrow M, s \nvDash p1$
5. $M, s \vDash \square p1 \Leftrightarrow$ для любого альтернативного мира w если $\langle s, w\rangle \in R$, то

   $(M, w \vDash p1)$

1. $M, s \vDash \Diamond p1 \Leftrightarrow$ существует альтернативный мир w, что $\langle s, w\rangle \in R$ и

   $(M, w \vDash p1)$

The feasibility relation (отношение выполнимости) is uniquely defined by its values on the set of elementary statements.

Простейшие свойства операторов

1. В разных модальных логиках отношение выполнимости определяется на разных классах шкал. Каждая разновидность шкал (отношения достижимости R) характеризуется определенным законом (формулой) модальной логики.

Оператор □ (necessary - необходимо)

2. $\models\Box(\varphi 1 \rightarrow \varphi 2) \rightarrow (\Box\varphi 1 \rightarrow \Box\varphi 2)$ (аксиома дистрибутивности K);
3. $\models\varphi \Rightarrow \models\Box\varphi$ (правило необходимости N).

В разных приложениях модальность необходимого может пониматься по разному. Отсюда большое разнообразие модальных логик.

Пример. Эпистемические логики

Эпистемические логики —изучают модальности знания и мнения (веры) некоторых идеализированных интеллектуальных агентов.

Изучаются вопросы о том,

какими знаниям располагает субъект,

насколько он осознает свои знания (и незнания), и

какие причинно-следственные связи возникают между утверждениями, касающимися вопросов знания и веры.

В эпистемической логике модальный оператор

□φ следует прочитывать «Я знаю, что φ»,

а

◇φ — «Я допускаю, что φ»

Пример. Эпистемические логики

Основные законы (аксиомы) эпистемической логики:

1. The Axiom of Adequacy of Knowledge: $\Box\varphi \to \varphi$ («Мои знания верны»)
2. The Axiom of Positive Introspection: $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ («Я вполне представляю все, что мне известно».)
3. The Axiom of Negative Introspection: $\Diamond\Box\varphi \to \Box\varphi$(«Я вполне сознаю, что именно мне неизвестно».)

Conclusion

- one must be able to connect **modality** and **probability**

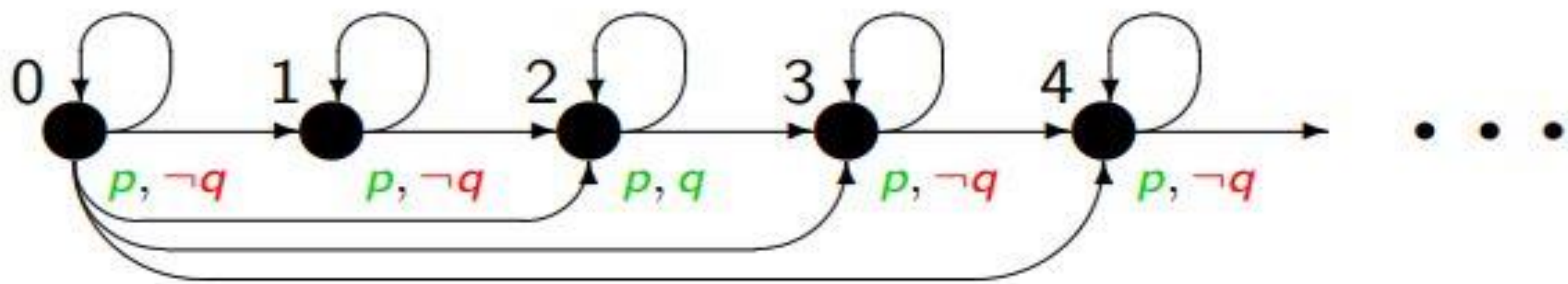
Пример. Темпоральная логика

Поскольку вычисление — это процесс, развивающийся во времени, состояния которого находятся в причинно-следственной связи друг с другом, темпоральные логики используются для спецификации и верификации программ.

Логика линейного времени LTL

Шкала Крипке для LTL (Linear Temporal Logics) — это натуральный ряд с естественным отношением порядка:

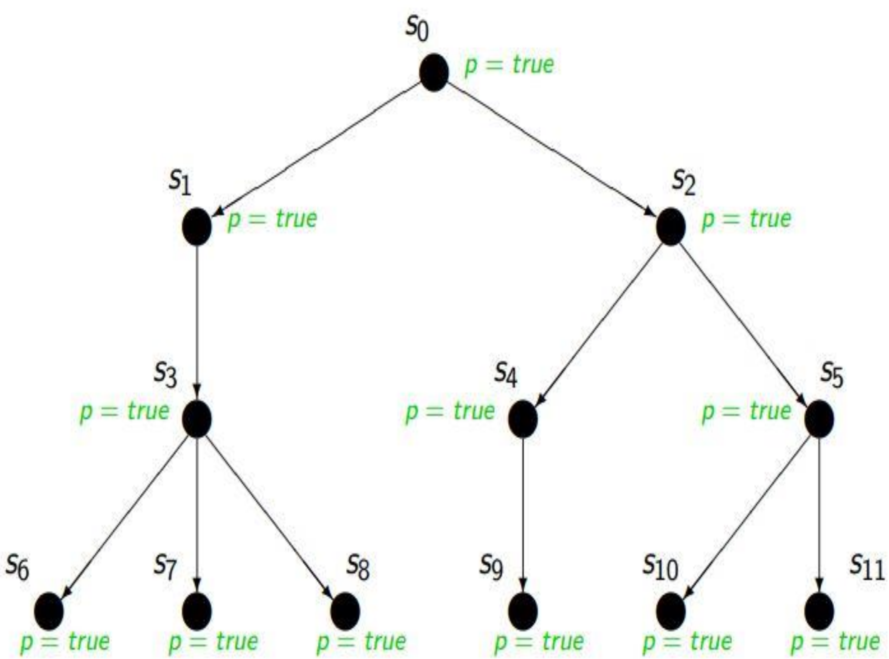
$$I,0 \models \Box p;\ I,0 \not\models \Box q;\ I,0 \models \Diamond q$$



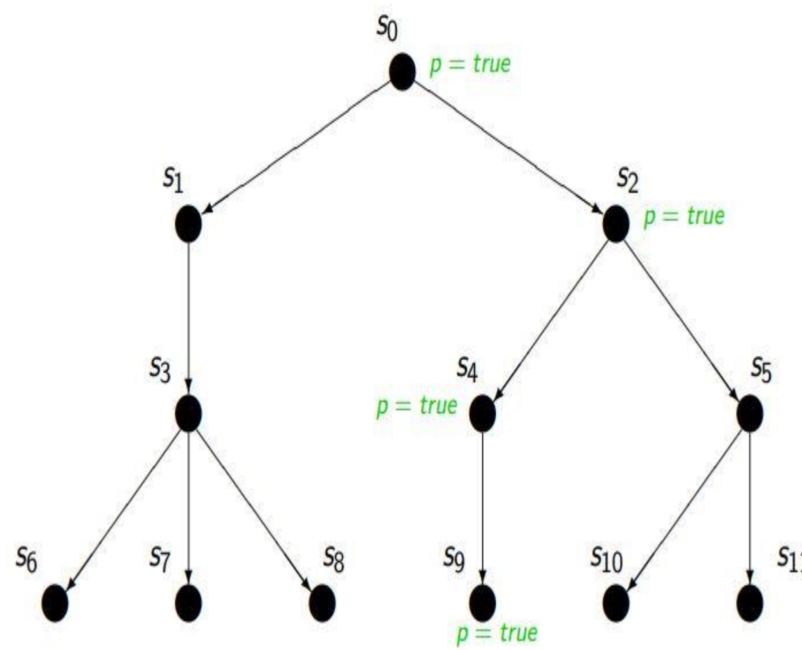
Пример. Темпоральная логика

В других темпоральных логиках время — это ветвящаяся структура; в каждый момент времени может быть несколько альтернатив дальнейшего развития событий.Одной из логик ветвящегося времени является логика деревьев вычислений (CTL, Computational Tree Logic), используемая для спецификации и верификации распределенных программ

$I, s_0 \models \forall\Box p$



$I, s_0 \models \exists\Box p$



Пример. Темпоральная логика

Пусть M = <W, R, E> -- древесная модель Крипке для логики CTL. $s \in W$ одно из состояний модели. Тогда:

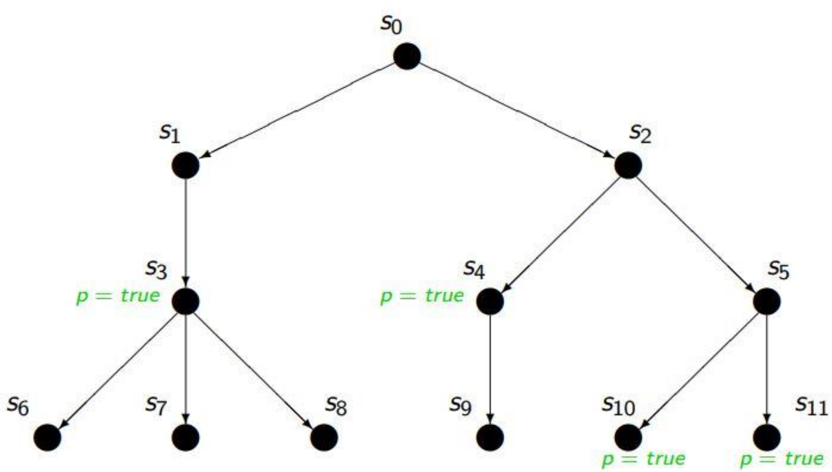
$I,s \models \forall\Box p \equiv$ в каждом состоянии s1, достижимом из состояния s, верно $I,s1 \models p$

$I,s \models \exists\Box p \equiv$ существует ветвь, исходящая из состояния s, в каждом состоянии s1 которой верно $I,s1 \models p$

$I,s \models \forall\Diamond p \equiv$ в каждой ветви, исходящей из состояния s, есть состояние s1, в котором верно $I,s1 \models p$

$I,s \models \exists\Diamond p \equiv$ существует ветвь, исходящая из состояния s, в одном из состоянии s1 которой верно $I,s1 \models p$

$I, s_0 \models \forall\Diamond p$



$I, s_0 \models \exists\Diamond p$