КАФЕДРА
ТЕЛЕМАТИКА

Санкт-Петербургский Государственный Политехнический Университет

Институт прикладной математики и механики

Методы исследовательской работы

Логико-алгебраический подход к синтезу вычислительных систем

(занятие 10)

4 апреля
2022 г.

Что обсуждали на прошлой лекции

Вычислительная платформа нового поколения

- Не нуждается в операционной системе и прикладном программном обеспечении в обычном «компьютерном» смысле. Функционирование платформы, подобно тому как это происходит в природе, реализуются путем самоорганизации аппаратного обеспечения и формирования порождающих процессы вычислений структур, участвующих во взаимодействии между всеми компонентами платформы.
- Вычисления наряду с программным управлением приобретают «интеллектуальный» характер, эволюционно реконфигурируя используемую аппаратную базу в соответствии со структурой данных, которые являются носителями прикладных алгоритмов. При этом программы вычислений представляются в виде «комплексов абелевых групп цепей операций, разделенных дифференциальными операторами границ и образующих гомотопические инварианты пространства состояний моделируемого объекта».
- Для описания результатов вычислений используются не числовые, а топологические структуры, которые позволяют представлять решения как совокупность линейно упорядоченных множеств, составленных из точек пространства состояний моделируемых объектов и наделенных различными топологическими свойствами (симплексы, циклы, непрерывность, размерность, связанность и т.д.), на которых заданы алгебраические операции.

Итого: чтобы повысить производительность компьютеров, надо от представления решений в виде микроскопических структур, образованных из отдельных чисел, переходить к построению из чисел макроскопических структур, допускающие

На лекции обсудим поиск «фундаментальной аксиоматики» процессов мышления в форме компьютерных вычислений

Основной операцией, которая участвует в объективизации мышления, сознания и интеллекта – является распознавание объектов реальности.
Вопрос: как описать процессы распознавания в границах, необходимых для мышления, так чтобы окружающая человека физико-химическое **пространство состояний** вещества, структур и энергии отобразилось на **пространство понятий**.

Процесс распознавания представляет собой сложный процесс взаимодействия, в котором можно выделить логико-алгебраические аспекты, а затем придать им форму топологических структур и компьютерных программ.

Итак, если речь идет об алгебре, которая объединяет операции с числами, топологическими структурами и понятиями, то надо прежде всего задуматься над **«фундаментальной аксиоматикой» такой алгебры.**

О мышлении и вычислениях

ПРАВ ТОТ, КТО СЧИТАЕТ РАЗДЕЛЕННОЕ — РАЗДЕЛЕННЫМ И СОЕДИНЕННОЕ — СОЕДИНЕННЫМ, А В ЗАБЛУЖДЕНИИ — ТОТ, МНЕНИЕ КОТОРОГО ПРОТИВОПОЛОЖНО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ОБСТОЯТЕЛЬСТВАМ.

Аристотель

НЕТ НИЧЕГО В ИНТЕЛЛЕКТЕ, ЧЕГО БЫ НЕ БЫЛО РАНЬШЕ В ЧУВСТВЕ, КРОМЕ САМОГО ИНТЕЛЛЕКТА.

Г. В. Лейбниц

НАД ВСЕМ НАШИМ ТЕОРЕТИЧЕСКИМ МЫШЛЕНИЕМ ГОСПОДСТВУЕТ С АБСОЛЮТНОЙ СИЛОЙ ТОТ ФАКТ, ЧТО НАШЕ СУБЪЕКТИВНОЕ МЫШЛЕНИЕ И ОБЪЕКТИВНЫЙ МИР ПОДЧИНЕНЫ ОДНИМ И ТЕМ ЖЕ ЗАКОНАМ И ЧТО ПОЭТОМУ ОНИ И НЕ МОГУТ ПРОТИВОРЕЧИТЬ ДРУГ ДРУГУ В СВОИХ РЕЗУЛЬТАТАХ, А ДОЛЖНЫ СОГЛАСОВЫВАТЬСЯ МЕЖДУ СОБОЙ.

Ф. Энгельс

Текущая Ситуация

Все современные компьютеры - это машины Тьюринга (МТ), исполняемые программы которых в принципе полностью переносимы между двумя различными реализациями МТ. «Физика» МТ не имеет значения для результата (возможно, имеет значение для скорости вычислений, но не для результата как такового).

Проблемы современных компьютерных технологий: точность и сложность вычислений.

Парадоксальные подходы к решению проблем:

- Чтобы повысить точность вычисления надо избавиться от чисел…
- Чтобы уменьшить сложность вычислений, надо избавиться от алгоритмов…

Процессы распознавания - алгебра над полем классов эквивалентности

Равенство меры (числа) или «взаимозаменяемость» :

- рефлексивность а=а
- симметричность, а=в, в=а
- транзитивность, а=в, в=с, с=а

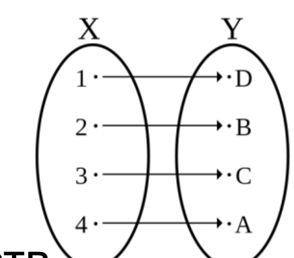
Формальное тождество (символы)

$$a^2 - b^2 \equiv (a+b)(a-b)$$
$$(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$$

Классы эквивалентности:

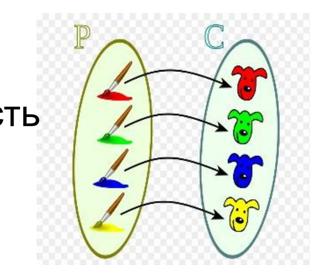
- рациональные числа как классы эквивалентных дробей
- мощность множеств
- отношение «истина-ложь»

Отношение эквивалентности, определенное на множестве (равноценность, совпадение по смыслу, значению или содержанию , общность строения, …)



Биекция множеств

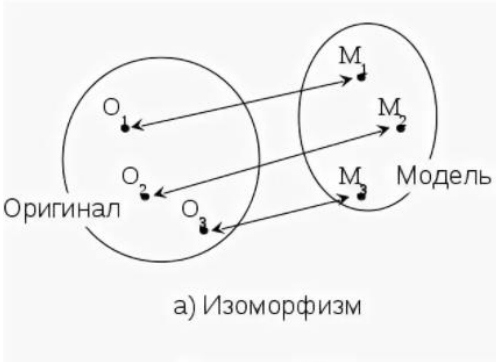
Эквива-лентность цветов



Морфизмы (отображения) структуры, операций и функций объектов

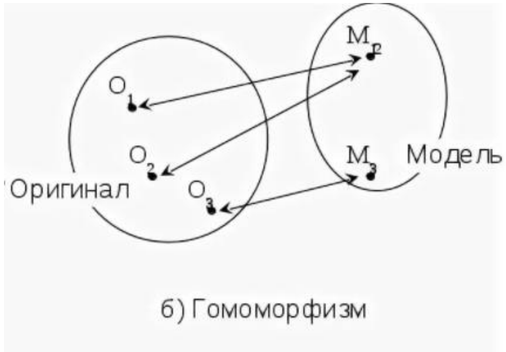
- Изоморфизм двух абстрактных множеств, сохраняет все свойства элементов этих систем и все отношения между ними.
- Например, изоморфизм алгебраических групп, а именно:

единице одной группы соответствует единица другой и для любых двух пар соответствующих друг другу элементов a и b, a’ и b’ из этих групп соответствовать друг другу будут также обратные элементы a^{-1}, и b^{-1}произведения ab=c, a’b’=c’.



а) Изоморфизм

Взаимно-однозначное соответствие



б) Гомоморфизм

Подобие

Гомоморфное преобразование - отображение в модели существенных свойств (атрибутов класса, объектов внешнего мира)

Формализация отношения эквивалентности: фактор-множество

Введем понятие фактор-множество М относительно отношения эквивалентности R (R/M).

Дано: исходное множество М и на нем определено отношения эквивалентности R. Тогда фактор-множество – это множество всех классов эквивалентности исходного множества по отношению к R.

Пример: пусть R_5 – это отношение эквивалетности на множестве Z: aR_5b, зададим R_5 как отношение a=b mod 5, получим

классы эквивалентности:

{1,6,11,16…} , {2, 7, 12, …} , {3, 8, 13, …} , { 4, 9, 14, ..} , { 0, 5,10,..}

фактор-множество: Z/R_5 = { [1], [2], [3], [4], [0]}, где [x] – отношение эквивалентности.

В результате исходное множество распадается на непересекающиеся классы элементов (классы эквивалентности). Множество классов эквивалентности называется фактор-множеством множества М по отношению к R. Число классов эквивалентности отношения эквивалентности R называется индексом множества М.

- Конгруэнция – отношение эквивалентности, подстановочное для любой определенной на данном множестве операции.

Алгебраическая система

Определение: алгебраическая система (АС) в универсальной алгебре — это непустое G множество (носитель) с заданным на нём набором операций и отношений (сигнатурой).

АС с пустым множеством отношений - алгебра,

с пустым множеством операций — модель

Понятие АС возникло из наблюдений за общностью конструкций, характерных для различных алгебраических структур, таких как

группа, кольцо, решётка

отношения эквивалентности

гоморфизма, изоморфизма, фактор-множество

Классы алгебраических систем:

Группойд – множество с одной бинарной операцией GXG - > G (операция «умножение»)

Моноид — полугруппа с нейтральным элементом **a+0=a**

Группа — моноид, в котором для каждого элемента a группы можно определить обратный элемент a^{-1}, такой, что $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$

Абелева группа – группа с коммутативной операцией a*b=b*a (операция «сложение)

Теорема о гомоморфизмах

Теорема: Для любого гомоморфизма алгебраической системы A в универсальную алгебраическую систему B можно указать такое отношение конгруэнтности ρ на A, что B изоморфна факторалгебре A/ρ = [A]»

Роль теоремы: фиксируется связь между основными понятиями теории, а точность описания объектов с помощью теории – это точность соглашения о неразличении отождествляемого.

Обобщения в контексте задач построения «умных» вычислительных систем

Основной тезис: Рассмотрение вычислительной платформы как алгебраической системы.

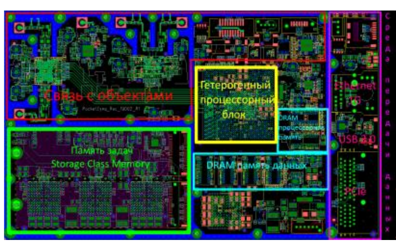
Алгебраическая система определена с точностью до изоморфизма. Поэтому при построении АС можно использовать стандартные аппаратно-программные компоненты, которые реализуют не только операции булевой алгебры (БА) и соответствующие гомоморфизмы классов эквивалентности множества алгоритмов – кольцо «компьютерных чисел» (БА изоморфна алгебре всех подмножеств некоторого множества), но и другие фактор-множества относительно различных отношений.
Для этого отношение конгруэнтности надо выбрать так, чтобы операция «распознавания» объектов реальности была возможна в логико-алгебраических терминах .

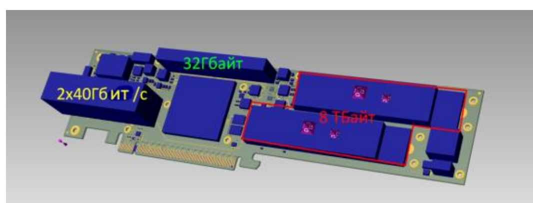
Ю. А. Гастев: единственным объективным источником описания реальности служит сама эта реальность.

Иерархия вычислительных «уровней и функций» необходимых и достаточных для реализации отношения конгруэнтности

Уровень «объяснения» и «моделирования/simulation/modeling» >4 Гфлопс/Вт

Уровень «агрегации» и «машинного обучения» >10 Гфлопс/Вт





Уровень доступа и предобработки «больших данных» >20 Гфлопс/Вт