КАФЕДРА
ТЕЛЕМАТИКА

Санкт-Петербургский
Государственный
Политехнический
Университет

Институт прикладной
математики и механики

История и методология математики и компьютерных наук

Лекция 7

Тема 2. **Математика природы.**

Основы «рациональности» сознательных решений, частичная «рациональность» натуральных вычислений

20 октября 2022 г.

Что обсуждали на прошлой лекции

- Тема 1. Методология математики. История развития математики как фундаментальной и прикладной науки. Числа, слова и операции. Место математики в современной системе научных знаний. Основные принципы, теоремы и структуры.

- Тема 2. Математика природы.
  - Умопостигаемое и вычислимое число
  - Проблемы формализации знаний, инвариантности и интерпретации понятий
  - Функция интуиции как «регрессия» (от лат. regressio «обратное движение, возвращение») сознания к состоянию устойчивого неравновесия
  - Основа «рациональности» методов машинного обучения решений,
  - Частичная «рациональность» - фактор внимания, воображения и формирования частично-рекурсивных функций объяснения принятых решений

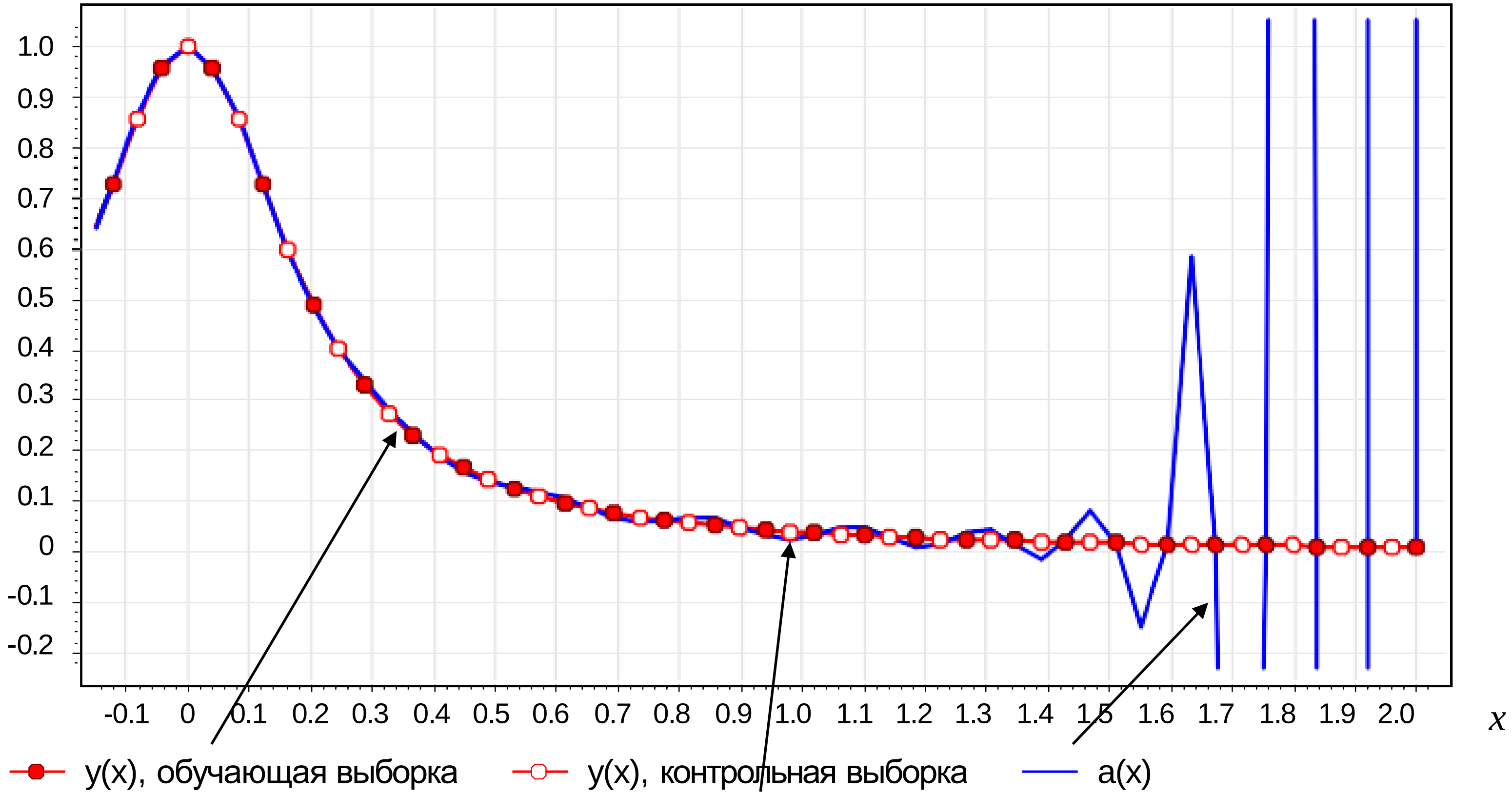
Рассмотрели «фундаментальные» проблемы МО: переобучения и не дообучения

- Формальное МО –можно рассматривать как процесс построения оператора (модели) отображения множества входных данных, которые в имплицитной форме содержать множество выходных данных.
- Переобучение (overitting) модели - нежелательное явление, возникающее при решении задач машинного обучения по прецедентам (на основе анализа выборки данных), когда вероятность ошибки обученной «машины» на данных из тестовой выборки оказывается существенно выше, чем средняя ошибка на обучающей выборке.
- Переобучение возникает при использовании избыточно сложных моделей .
  - Не дообучение - нежелательное явление, возникающее при решении задач обучения по прецедентам, когда алгоритм обучения не обеспечивает достаточно малой величины средней ошибки на обучающей выборке.
- Не дообучение возникает при использовании недостаточно сложных моделей.

Пример. Переобучение модели порядка $n = 38$, при $e = 50$

$$y(x) = \frac{1}{1 + 25x^2};$$

для «приближения» функции $y(x)$ *по 50 точкам – обучающей выборки используется* полином $a(x)$ - степени $n = 38$



Таким образом

Переобучение есть результат того, что

- параметры θ обучаемой модели $a(x, \theta)$ «расходуются» на чрезмерно точную подгонку конкретный набор данных обучающующей выборки, в результате «обученная» модель не отражает всех свойств изучаемого объекта
- отсутствия «обобщающих» способностей у используемой модели

Устранить переообучение невозможно. Однако, последствия переобучения можно минимизировать тем, что

- накладывать ограничения на значения θ (регуляризация)
- минимизировать только одну из теоретических оценок
- обучать модель на основе использования дополнительных данных и априорных знаний
- «развивать» обобщающие способности используемых моделей

На этой лекции обсудим

- Тема 1. Методология математики. История развития математики как фундаментальной и прикладной науки. Числа, слова и операции. Место математики в современной системе научных знаний. Основные принципы, теоремы и структуры.

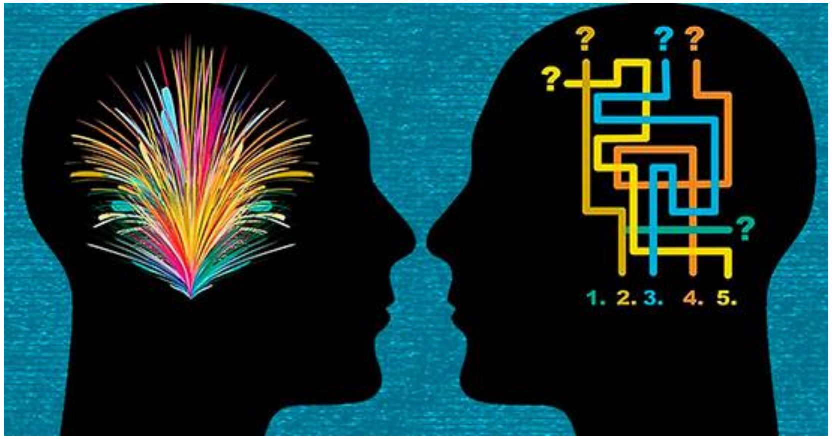
- Тема 2. Математика природы.
  - Умопостигаемое и вычислимое **число**
  - **Проблемы** формализации знаний, инвариантности и интерпретации понятий
  - **Функция** интуиции как «регрессия» состояний к устойчивому неравновесию
  - Основы «рациональности» сознательных решений, частичная «рациональность» натуральных вычислений
  - фактор внимания и формирования частично-рекурсивных функций объяснения принятых решений

обучение как процесс принятия <u>рациональных</u> решений

Рассмотрим пример: регрессия принимаемых решений к результатам измерения физических процессов. Если фид физических законов известен, то такой процесс называется **идентификация** уравнений процесса (в узком смысле идентификацию может рассматриваться как основа явления «**обучения**»).

- **Суть рациональности (**от лат. ratio — разум) **:** характеристика решения с точки зрения его соответствия некоторым априорным сведениям и принципам мышления.

Особенностьт: «решение м.б. **логично, но не всегда рационально**, однако все ***рациональное – всегда логично***».



мыслительный процесс – «коктейль» из логики и эмоций

Рациональные решения можно объяснить, связав объяснения с алгоритмом действий .

Иррациональное решение принимается под воздействием эмоций, различных субъективных факторов и влияиния настроения.

Алгоритм мыслительного процесса

основан на **принципе рационализма, который** :

1. из потока данных выделяет объект-восприятия и анализируя его сопоставляет этому объекту некоторое **понятие** (объект когнитивного пространства);
2. На основе выбранного понятия формируется новый когнитивный объект - **суждение** , которые определяет связи воспринимаемого объекта с другими событиями, явлениями, объектами;
3. Результатом процесса является **умозаключение** – формулировка сделанных выводов.

Суть рационализма – формирование решений на основе согласования воспринимаемых данных с априорными знаниями и ранее полученным опытом решения аналогичных проблем…

Рациональный – это «идеальный» интеллект, основанный на анализе данных с использованием **вычислительных алгоритмов**, имеющих явную форму ("explicit) представления.

Суть «работы» , которая совершается при приятии рациональных решений

компьютер можно представить как «двигатель», который рассеивает энергию ,выполняя математическую работу

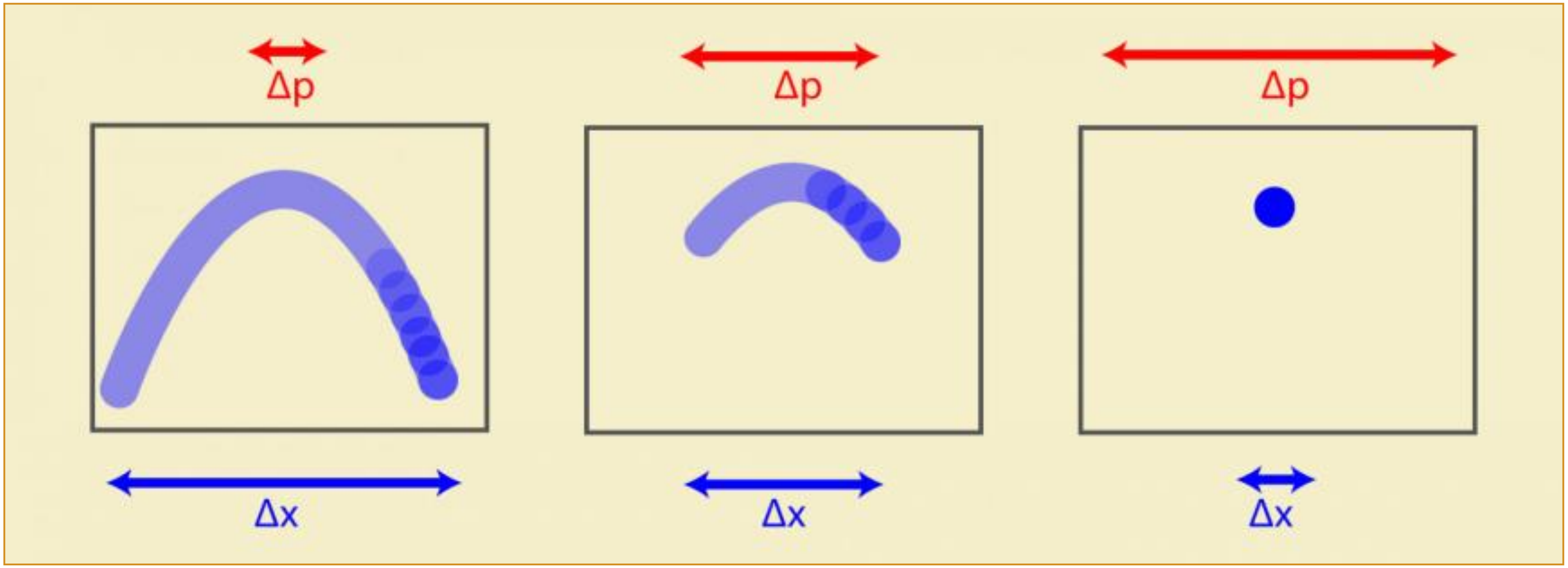
Ч. Беннет,1981

.

Формально любой **алгоритм** вычислений с точки зрения физики задает «траекторию» движения данных в «пространстве» возможных состояний конечного автомата – программируемого компьютера. **Алгоритмом** может быть «программа» как структура данных и команд или структура самого «вычислителя»

Вопрос. Можно ли достигать результата вычислений так, чтобы этот результат имел **объяснение?**
Ответ. Можно, если ограничиться классом «рациональных» результатов.

Пример 1: кто объяснит, с какой точностью надо проводить вычисления параметров движения ?



Три альтернативных фотографии движущегося физического объекта: с увеличением пространственно-временного интервала (выдержки фотоаппарата), уменьшается количество информации об импульсе (траектории движения объекта). В силу физических законов с одинаковой точностью измерить координаты и скорость физического объекта сложно. Почему ?

Пример 2: иррациональное решение.

Дано: $$\frac{1+\sin x}{n} = \frac{1+\sin x}{n} = 1 + \mathrm{six} = 7$$

Почему так ☺

$$\frac{1+\sin x}{n} =$$
$$= \frac{1+\mathrm{si}\cancel{n}\,x}{\cancel{n}} =$$
$$= 1 + \mathrm{six} =$$
$$= 7$$

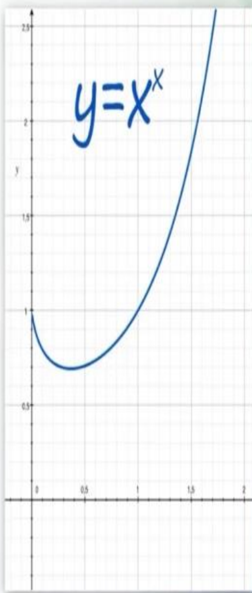
Или : дано предложение **«1 плюс три = ? ». Вопрос как (можно ли в принципе) построить автомат: который может** вычислить “правильное” решение» ?

Фундаментальная проблема :
ограниченная «рациональность» сознательных решений

$$1 = 0{,}9999999999999999999\ldots$$

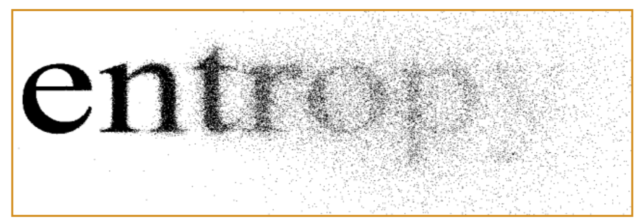
$$-1 \simeq e^{-i\pi}$$

X	X^X
1	1
0,9	0,909
0,8	0,836
0,7	0,779
0,6	0,736
0,5	0,707
0,4	0,693
0,3	0,697
0,2	0,725
0,1	0,794
0,01	0,955
0,001	0,993
0,00001	0,9998



$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$$

Суть «разрыва»: неоднозначность цифровых кодов ,…**конечная точность** чисел, множественность **алгоритмов,** которые «требуют» **различных архитектур**



Рациональные решения основаны на понятиях, которым в реальности можно сопоставить конкретные объекты или процессы. В когнитивных функциях проводятся операции как с «символами» чисел : **0, 1,** так и символами **∞ , словами, «картинками» и неделимыми символами**

Компьютерное моделирование как «фазовый переход» между рациональным сознанием и физической реальностью

Пространство мыслимых понятий:

Пространство вычислимых понятий: можно рассматривать когнитивные процессы в узком смысле…на основе использования ресурсов **памяти**, функций представления данных, **восприятия** результатов и **внимания** к цели

Итак, современные компьютерные вычисления – это преобразования «чисел» - как атрибута рациональных решений с помощью алгоритмов, атрибутами которых могут являться понятия, используемые для объяснения физической реальности.

Вопрос, на который надо дать ответ:почему можно скопировать информацию, но нельзя на «флешку2 «записать, а затем передать» знания

Когнитивный парадокс : чтобы поставить точный диагноз, нужно произвести вскрытие

«физика» рациональных процессов: X^3xT^1 vs X^3xT^6

Реализации процессов вычислений под управление алгоритмов и … входных данных

вход — алгоритм — выход

теория алгоритмов вычислений

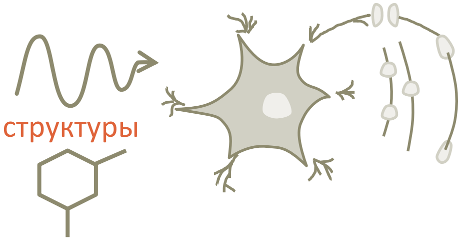
R^6:
размерность когнитивного пространства
X^3xT^3

?

Электронная платформа программных автоматов

Клеточно-нейронная реализация: генетическая платформа & метаболическая реакция

синтез структуры



реализация вычислений
либо:
- необратимая диссипация
  или
- накопление информации , прогноз будущего , развития

настоящее
Будущее (прогноз)
Прошлое (память)

R^4:
размерность физического пространства
X^3xT^1

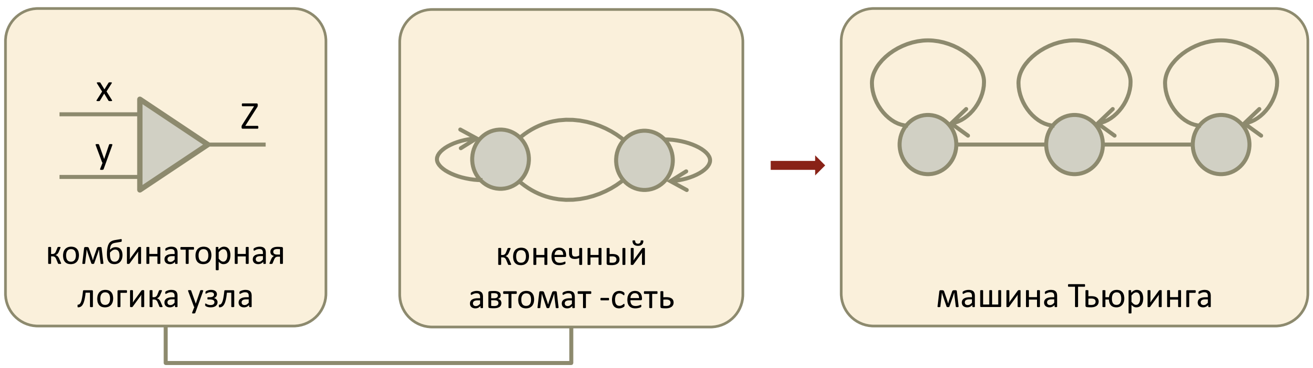
необратимый
рост энтропии

экспрессия генов

Нейромедиаторы
инф. обмена, способные к
накоплению информации

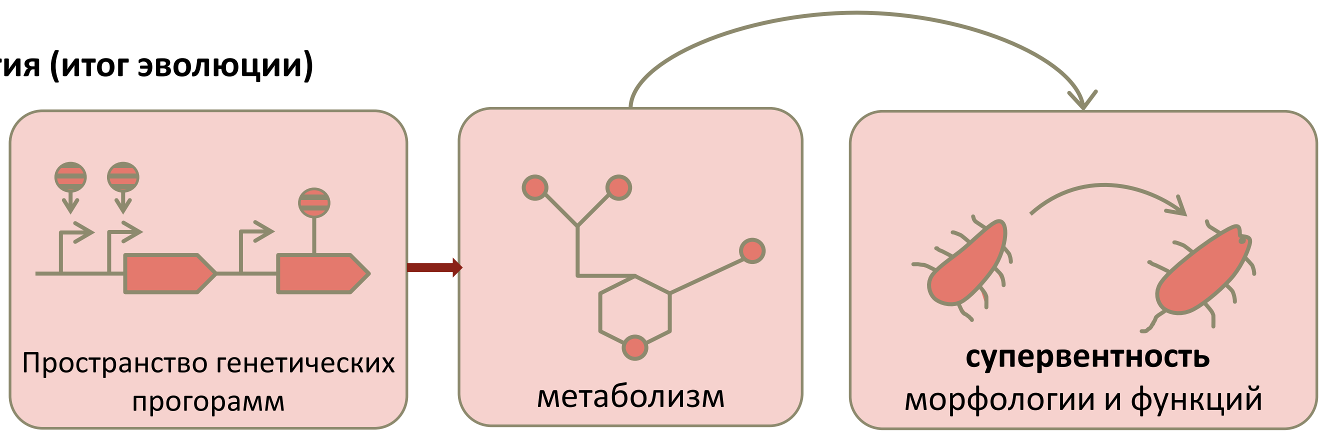
структурная адаптация «морфология-функция»

Компьютерные науки (формальная модель)



Много функций – одна «машинная» реализация

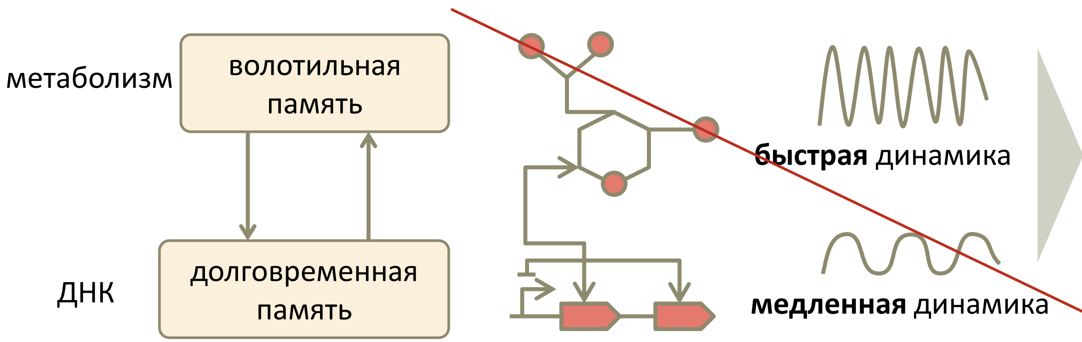
Биология (итог эволюции)



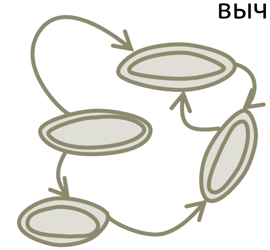
Одна функция– много вариантов реализации

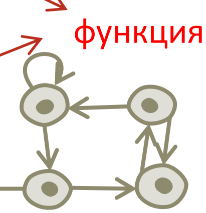
Этапы «натуральных вычислений»: частичная «рациональность» генетических алгоритмов

1) **Модальный** (контекстный) синтез **белка** для клетки-нейро вычислителя

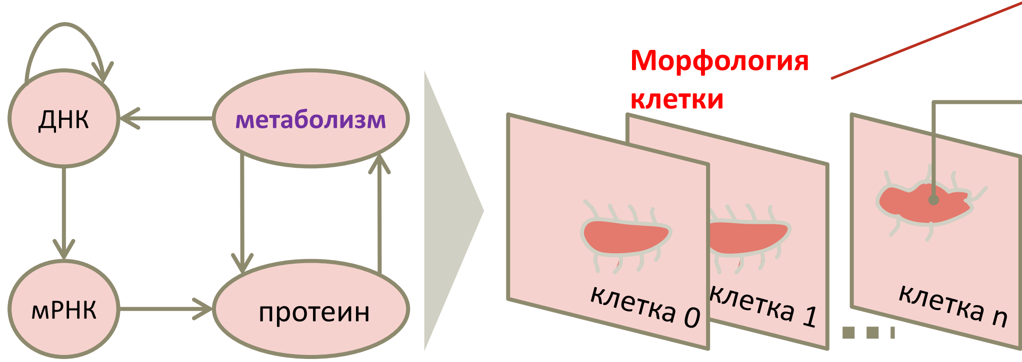


2) реконфигурация «консорциума» имеющихся клеток-вычислителей





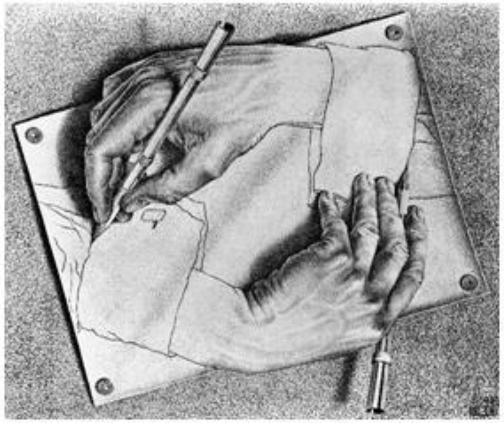
3) Реализация процесса «обучения» на основе **контекста** текущей ситуации



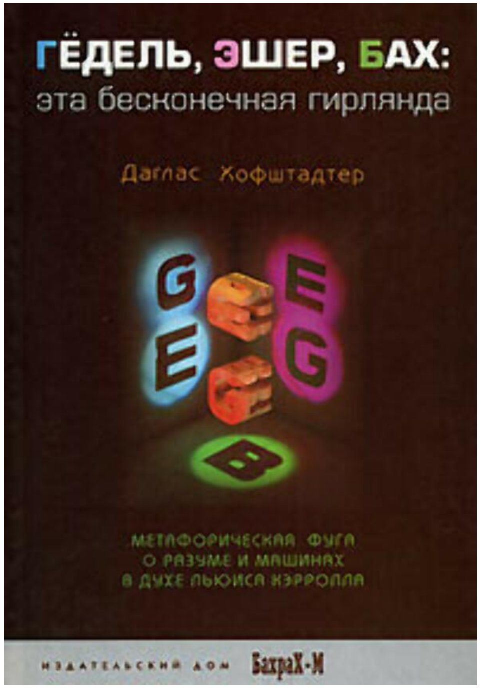
Эпигеномика – обратимые модификации клеточной ДНК. Изменяют экспрессию генов без изменения первичного кода ДНК

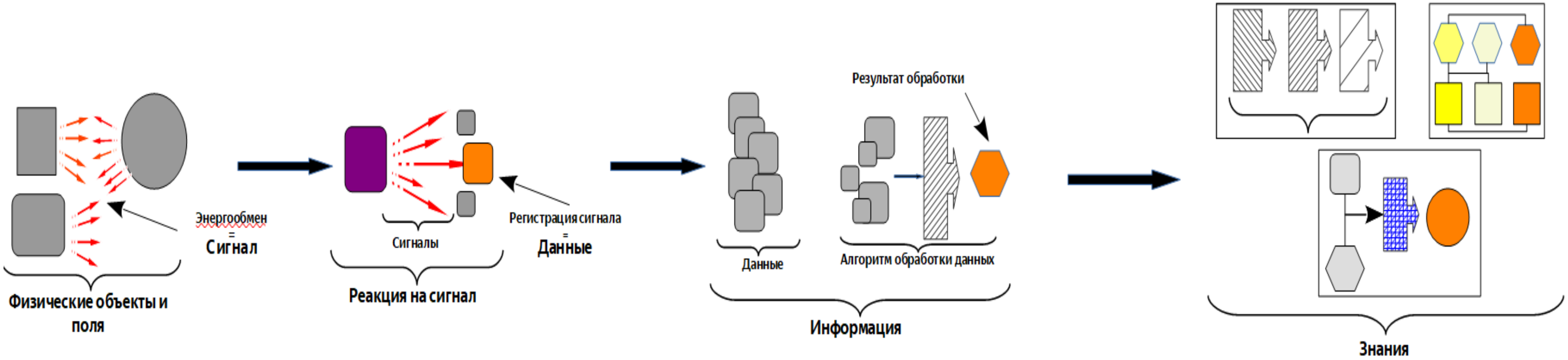
рациональность в «запутанных» СИСТЕМАХ или проблема цифровой трансформации

Картина Эшера рисующие руки



Пример взаимного сосоздания и циркулярной причинности.
Метафора странной петли Хофштаттера





Пример: «Запутывание» атома в силовом поле –отсутствие рационального решения

Рассматривая информацию как феномен реальности, можно предложить «формулу» физической реальности :

материя= (вещество + энергия) + информация.

Пример: описание единичного кубита

2-мерное гильбертово пространство с базисом $|e\rangle$, $|g\rangle$

$$|e\rangle = 1\cdot|e\rangle + 0\cdot|g\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad |g\rangle = 0\cdot|e\rangle + 1\cdot|g\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Волновая функция кубита эволюционирует в 2-мерном гильбертовом пространстве

$$|\phi\rangle = a|e\rangle + b|g\rangle = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

Скалярное произведение $\langle\phi_k|\phi_l\rangle = \begin{pmatrix}a_k^* & b_k^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_l\\b_l\end{pmatrix} = a_k^* a_l + b_k^* b_l$

Операторы, действующие на состояния кубита –2×2 матрицы $Q|\phi\rangle = \begin{pmatrix}q_{11} & q_{12}\\ q_{21} & q_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}q_{11}a + q_{12}b\\ q_{21}a + q_{22}b\end{pmatrix}$

Все возможные состояния связаны унитарными преобразованиями

$$|\phi\rangle \to U|\phi\rangle \quad U = \begin{pmatrix}c\exp(-i\alpha) & -t\exp(i\beta)\\ t\exp(-i\beta) & c\exp(i\alpha)\end{pmatrix}, c^2 + t^2 = 1$$

Разные состояния кубита не всегда различимы.

При измерении состояния $|\phi_1\rangle = \begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}$ есть возможность обнаружить другое состояние $|\phi_2\rangle = \begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}$ с вероятностью $P = |\langle\phi_2|\phi_1\rangle|^2$

Различимы только ортогональные состояния, например, собственные состояния эрмитовых операторов.

Заключение

- Поиск рациональных решений составляет основу современных методов машинного обучения.
- Возможности рационального описания решений и явного (формального) представления алгоритмов получения решений ограничены (Теоремы Геделя)
- Вероятностное описание сложных событий и природа квантовых измерений (англ. quantum measurement) позволяет перейти к использованию решений «частичной рациональности», в которых часть параметров моделей реальности имеет вероятностное представление, а их количественные выражения проявляется лишь через субъективное восприятие