



**История и методология математики и компьютерных наук**

Лекция 6

**Тема 2. Математика природы.  
интуиция как функция «регрессии» к  
состоянию устойчивого неравновесия**

---

13 октября 2022 г.

Санкт-Петербургский  
Государственный  
Политехнический  
Университет

Институт прикладной  
математики и механики

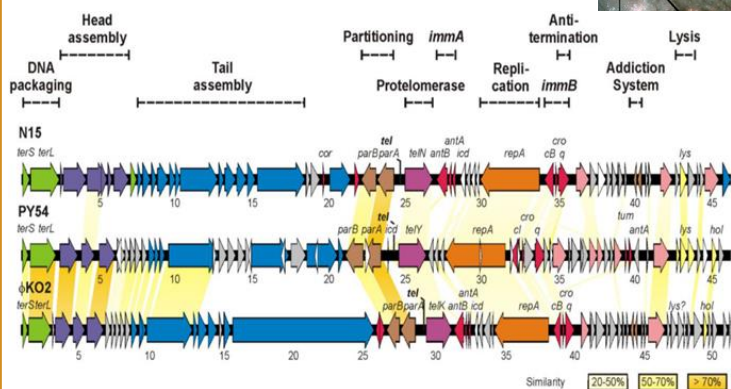
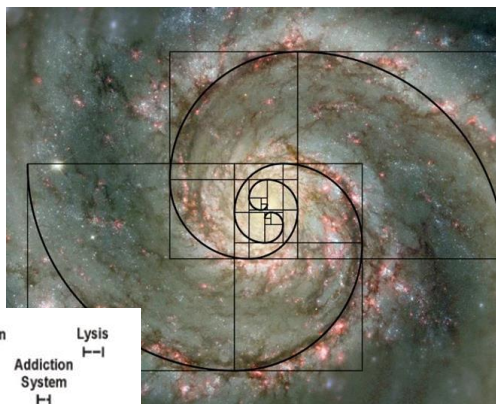
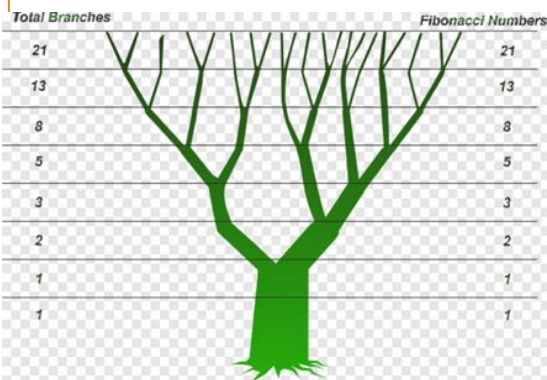
# Что обсуждали на предыдущей лекции

- Тема 1. Методология математики. История развития математики как фундаментальной и прикладной науки. Числа, слова и операции. Место математики в современной системе научных знаний. Основные принципы, теоремы и структуры.
- Тема 2. Математика природы.
  - Умопостижимое и вычислимое число
  - **Проблемы формализации знаний, инвариантности и интерпретации понятий**
  - Функция интуиции как «регрессия» к состоянию устойчивого неравновесия
  - Природа «рациональности» принимаемых решений,
  - Частичная «рациональность» - фактор внимания и формирования частично-рекурсивных функций объяснения принятых решений

# Какой вывод был сделан

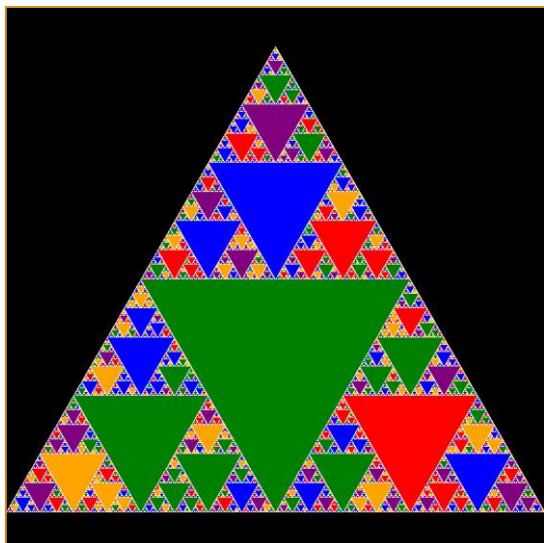
Природные вычисления есть, они рекурсивны (как в абстрактном смысле, так и в аспекте программирования) и открыты, т.е. новый результат вычислений (новое состояние) основан на предыдущем результате (предыдущем состоянии).

Основные «результатами» вычисляемых объектов являются: 1) живые организмы, 2) объекты Вселенной, 3) аттракторы процессов....



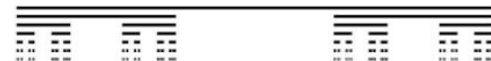
# Возможности рекурсии как конструктивного фундаментального процесса (**симметрии**) используются

В математике

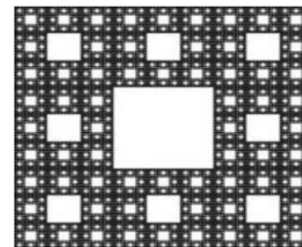


## Построенные вырезанием

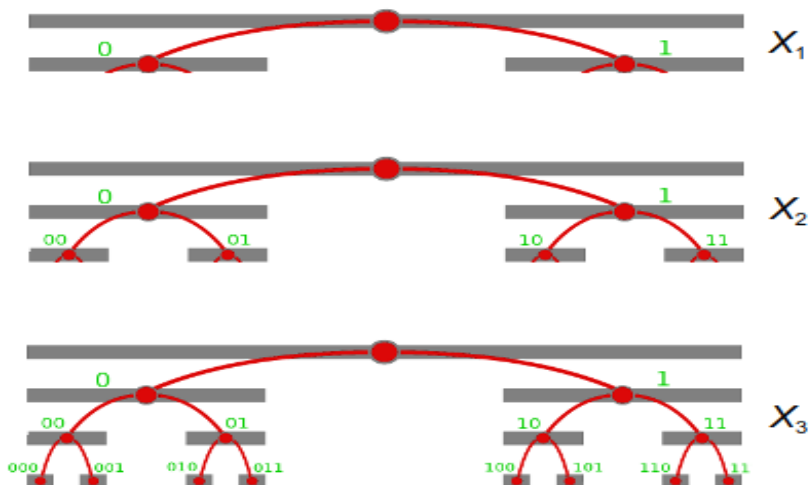
Множество Кантора



Ковер Серпинского



В природе



**Умберто Матурана:** Познать (вычислить) можно лишь то, **что логически доказуемо**.... , т. е. следует из того, что было логически доказано ранее

**«Биология познания» (1970)**



**Современная модель «знаний»** основана на законах логики, обладающих свойством **транзитивности**:

- если высказывание логически доказуемо, оно истинно (доказательств лжи не существует);
- логическое противоречие недоказуемо и т.п.
- если высказывание истинно, то неверно, что его отрицание также истинно.

# На этой лекции обсудим

- **Тема 1. Методология математики.** История развития математики как фундаментальной и прикладной науки. Числа, слова и операции. Место математики в современной системе научных знаний. Основные принципы, теоремы и структуры.
- **Тема 2. Математика природы.**
  - Умопостижимое и вычислимое число
  - **Проблемы** формализации знаний, инвариантности и интерпретации понятий
  - **Функция интуиции как «регрессия» состояний к устойчивому неравновесию**
  - Природа «рациональности» принимаемых решений,
  - Частичная «рациональность» - фактор внимания и формирования частично-рекурсивных функций объяснения принятых решений

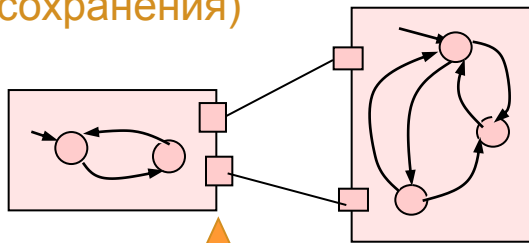
# Интуиция как «катализатор» решения инженерных проблем

Формальная модель **непрерывное время**

$$A=(S,U,V, \delta, \varphi, t);$$

$$\delta: U \times V \rightarrow S \dots$$

(первые принципы: законы сохранения)



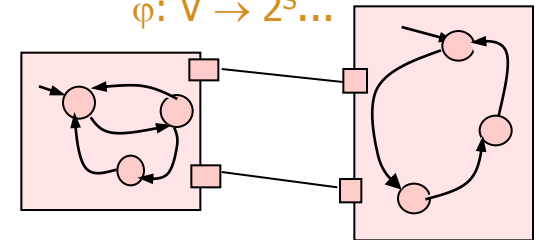
идентификация, оптимизация, эквивалентные преобразования

Образ объекта, воспринимаемый в момент **K**

$$A=(S,U,V, \delta, \varphi, k);$$

$$\delta: U \times V \rightarrow S;$$

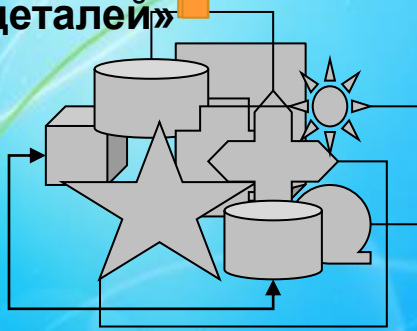
$$\varphi: V \rightarrow 2^S \dots$$



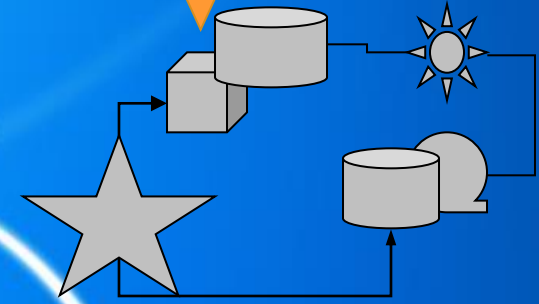
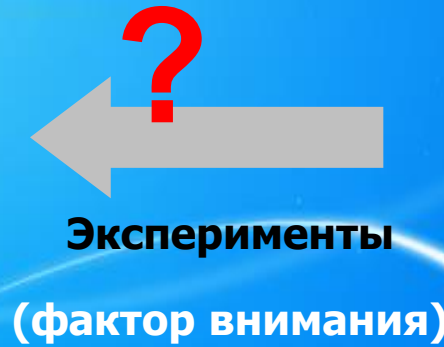
Абстрагирование

ИНТУИЦИЯ

Реальный мир «полный деталей»



Объяснения результатов



Описание

# Логика «формализации» приводит к нарушению коммутативности содержания понятий нарратива

- *Есть утверждение (нарратив):*
- *Джон умер, и его похоронили.*

для формализации этого утверждения **классическая логика неадекватна**: так из “Джон умер, и его похоронили не следует “Джона похоронили, и он умер”.

**Имеет место нарушение коммутативности:**

**Средства координатизации истины в контексте модальности:** ‘всегда’, ‘верю’, ‘разрешено’, ‘знаю’, ‘когда-нибудь в будущем’, ... ..



# характеризация истины - модальность: сильная и слабая

Вася --- болен.

будет когда-то ....

- врач знает, что
- в будущем всегда будет
- был когда-то .....
- 1. всегда был ....
- имеет право быть больным
- я считаю, что .....
- ... ..

## Обозначения:

$\square$   $\varphi = \varphi$  - '*сильная*' характеристика истины  $\varphi$  (*необходимость*)

$\diamond$   $\varphi = \varphi$  - '*слабая*' характеристика истины  $\varphi$  (*возможность*)

- В модальной логике 'сильные' и 'слабые' характеристики истины обозначаются одинаково:

'сильная' характеристика истины      $\square$  "Вася болен сегодня"

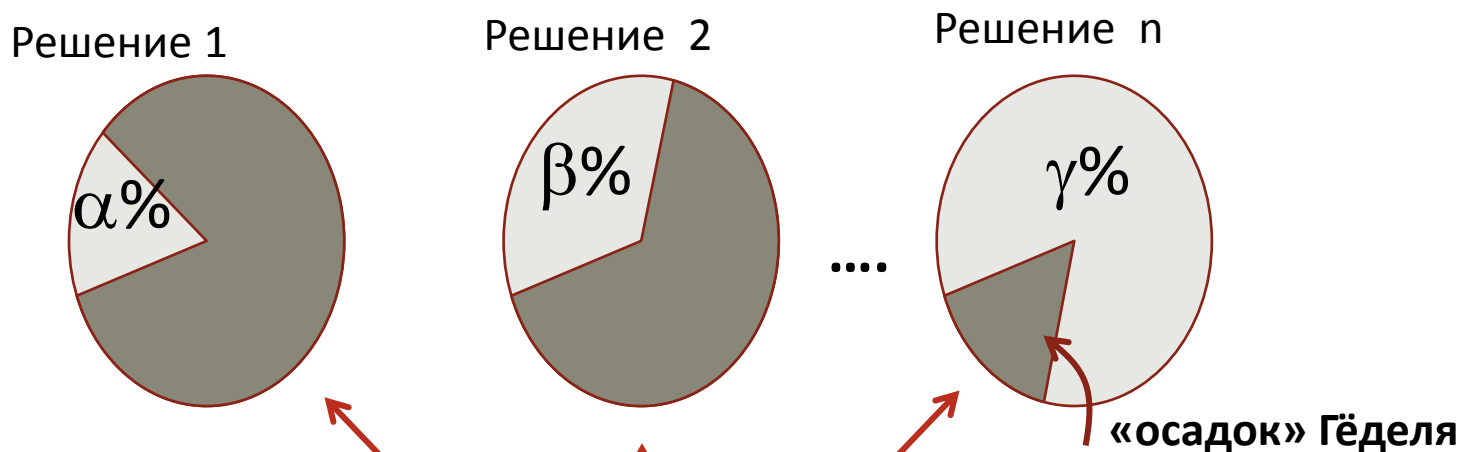
'слабая' характеристика истины      $\diamond$  "Вася болен наверное"

# Методологические ограничения «формальных» алгоритмов.

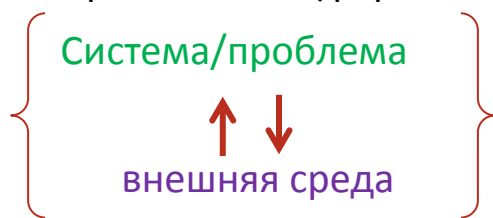
Теорема Геделя (свободная формулировка) утверждает

**Все формальные** ( математические, формальные) системы (построены с использованием арифметики) любой сложности **неполны**, то есть в рамках этих систем **существуют утверждения (решения)**, которые **истины**, но этот факт **не может быть доказан средствами самой системы.**

# «Информационный пепел» или «сухой осадок» Геделя - то, что формализуемо



Доля «проблемы», которая алгоритмически (формально/математически) разрешима



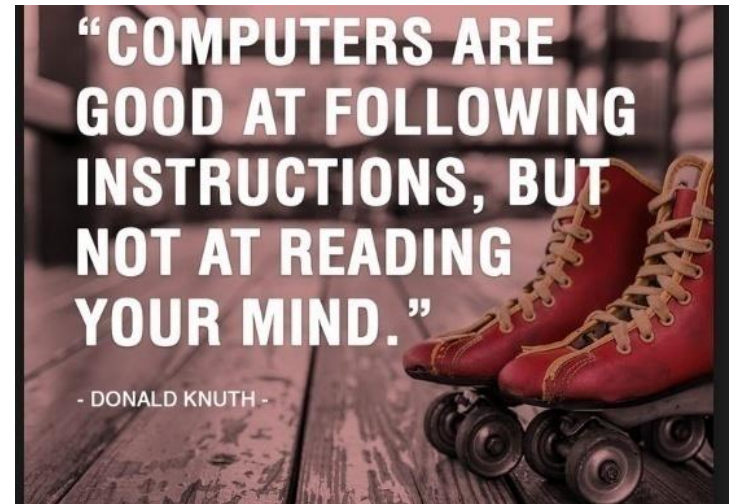
Темпоральное  
соотношение  
«неопределенности»:

$\text{RealTime}_{\text{система}} \ll \text{RealTime}_{\text{среда}} \rightarrow \text{алгоритм (ЭВМ)}$

$\text{RealTime}_{\text{система}} < \text{RealTime}_{\text{среда}} \rightarrow \text{АСУ(ЭВМ+человек)}$

$\text{RealTime}_{\text{система}} \sim \text{RealTime}_{\text{среда}} \rightarrow \text{интеллект (Человек)}$

## Цитаты классиков - Дональд Кнут:



Суть глубокой концептуальной проблемы программирования:

невозможно разработать сложную программу без «совершения» логических ошибок (рекурсия ошибок).

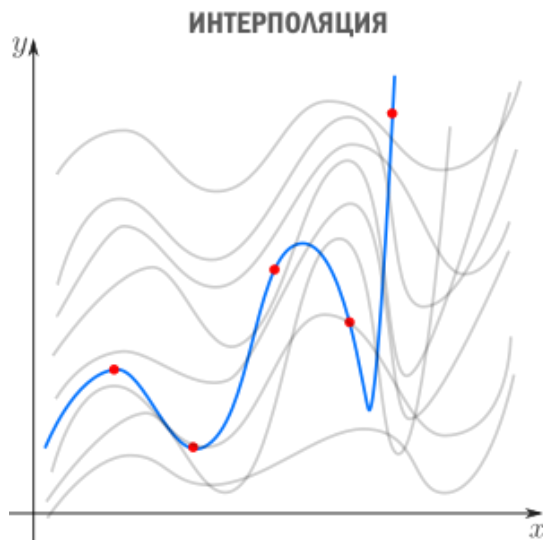
В реальности **существуют «не вычислимые» истины** - Поэтому современное рациональное компьютерное мышление нуждается в фундаментальной доработке, а именно

Необходимо в работу алгоритмов добавить новые механизмы **обучения в процессе его исполнения** за счет

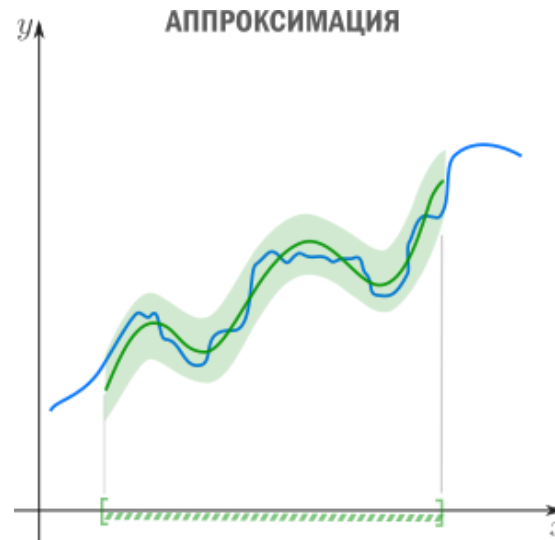
- **регрессии** к ранее успешно проведенным вычислениям (некоторому инварианту)
- **эмерджентности**, симметрии и инвариантности

# Уточним суть процесса названного математиками «регрессией»

В математике используются три близких по смыслу понятия: интерполяция, аппроксимация и регрессия. (от лат. regressus — «возвращение») по отношению к **среднему**.



Интерполяция — способ выбрать из семейства функций ту, которая проходит **через заданные точки**.



Аппроксимация — способ выбрать из семейства «простых» функций приближение для «сложной» функции **на отрезке**, при этом ошибка не должна превышать определенного предела.

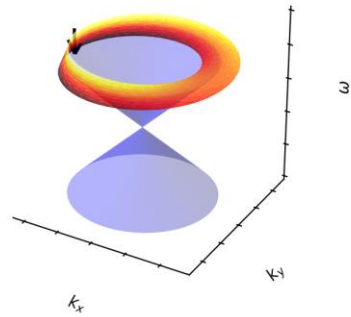
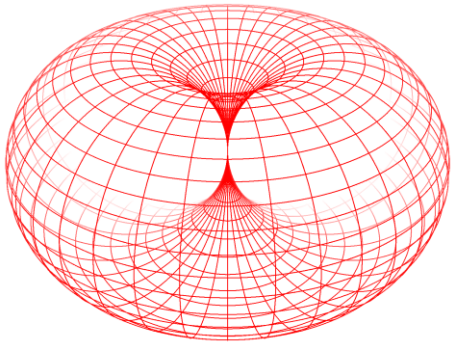


Регрессия — способ построения функции, которая минимизирует потери отклоняется от значений в **заданных точках**

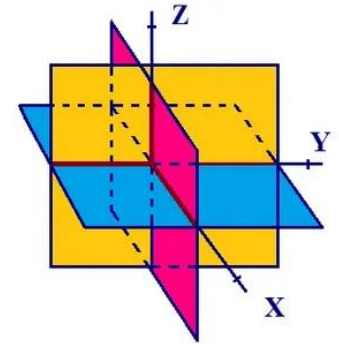
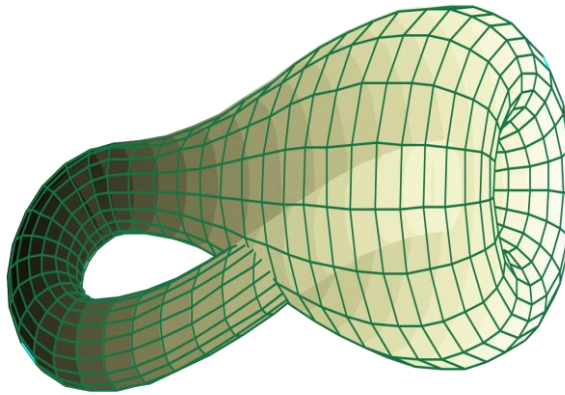
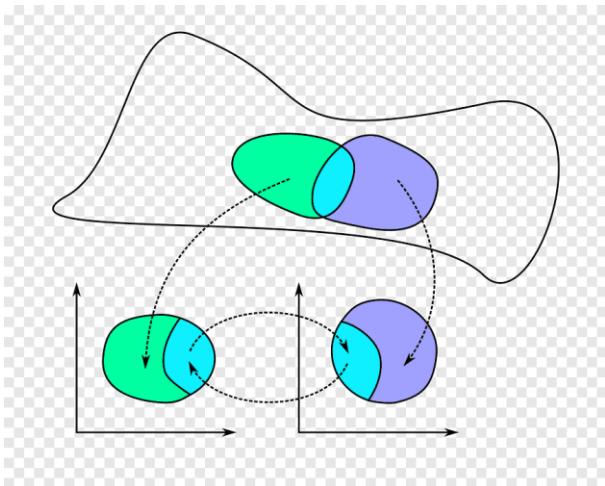
# Есть ли «регрессия» в процессе обучения ?

- .... Как можно представить решение задачи обучения с помощью ...регрессии (к чему !?)
- Является ли задача обучения «корректной по Адамару»
- Пояснения.
  - Корректно поставленная задача по Адамару в математике называется прикладная задача, решение которой
    - существует
    - единственно
    - устойчиво и непрерывно зависит от входных данных (непрерывно в некоторой “разумной” топологии)
  - топология - раздел математики, изучающий в самом общем виде явление
    - непрерывности.

# Различные «топологические пространства», в которых любой объект является объединением элементов «базы» этого пространства



В 3D векторном пространстве векторов «много», а базис пространства состоит из трех ортогональных векторов



Суть: любой объект реальности состоит из базовых элементов пространства, в котором он находится....



# суть задачи обучения ....

**Факт: явление «обучение» существует.** Суть явления – поддержание «актуального» состояния процесса ( «оператора») **непрерывного отображения** в общем случае счетного множества «облако данных» в **конечное множество «предметных» объектов** (понятий характеризующих **существенные свойства** объектов реальности).

- Поддержание актуальности возможно только в т.н. **активной системе**, которая находится в состоянии «устойчивого неравновесия» ( в физике «активности» нет, а рассматриваются лишь: изолированные, замкнутые и открытые системы)

Чтобы формализовать задачу обучения надо определить, что есть

1. «объект» **машинного обучения**
2. «предмет» **машинного обучения**

# О чем же формальная «суть задачи»

- Проблема: «физики» оптимистично верит, что законы Природы описываются «хорошими» гладкими функциями, которые можно дифференцировать и интегрировать некоторые уравнения по правилам (известным алгоритмам)
- Итак, вычислить решение уравнений, содержащих такие функции, надо уметь решить «прямую» задачу, используя для этого соответствующие уравнения и усвоенные ранее правила. Но сами уравнения кроме самих переменных имеют «структуру» и содержат параметры.
- Чтобы определить параметры уравнений, описывающих исследуемые процессы, надо научиться решить т.н. «обратные» задачи.
- Термин «обратная задача» был введен выдающимся российским математиком М.М. Лаврентьевым (1932-2010). Проблема: обратные задачи «некорректны по Адамару» – имеют множество решений. Чтобы выбрать «правильное решение» задачу надо «регуляризовать» – наложить ограничения, чтобы сохранить свойство «непрерывности» решений.

# Обучение как процесс решения «обратной задачи»

**Рассмотрим задачу:** на основе результатов проведения экспериментов с объектами, надо определить параметры уравнений, которые описывают процессы в этом объекте (регрессия решений уравнений к результатам измерения физических процессов). В технике такой называется **идентификация уравнений** (в узком смысле может рассматриваться как основа явления «**обучения**»).

- **Проблема:** задача «идентификации» не корректна по Адамару.... любые измерения физических величин всегда искажены случайными ошибками.

Надо понять

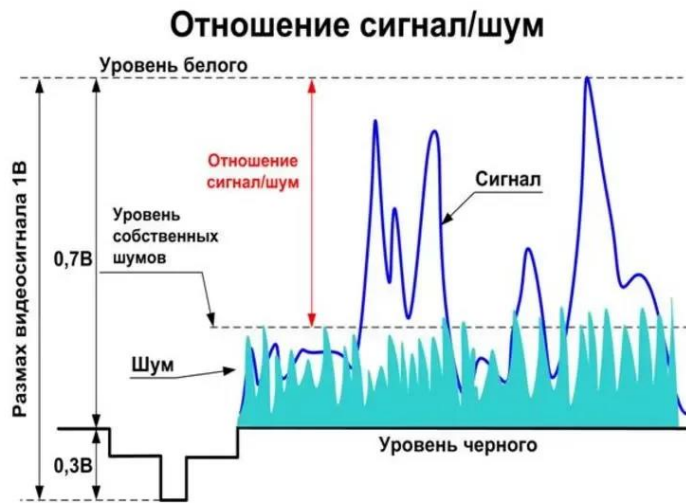
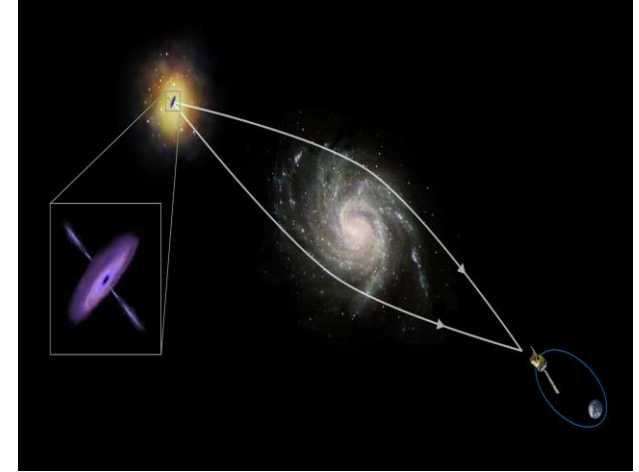
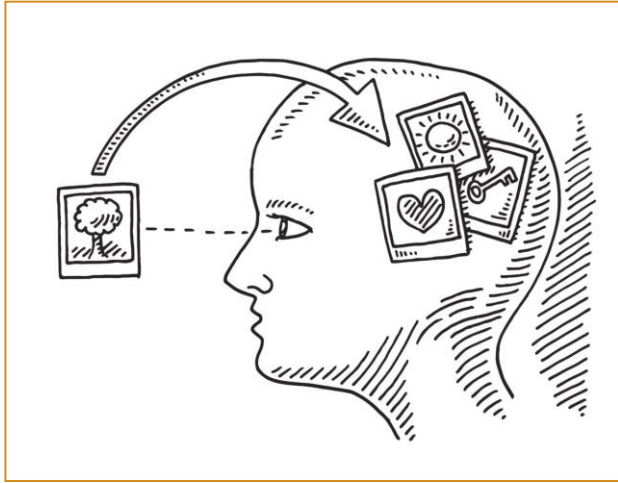
- как случайные ошибки измерений **влиять** на результат
- Как сделать так, чтобы случайные искажения не могли **исказить** результат

Для решения «обратных задач» необходимо использовать **некоторую дополнительную информацию** о свойствах решения, которая «напрямую» в **условиях самой задачи не содержится**. Формально, использование априорной информации это некоторое «насилие» **над «презумпцией «непрерывности» реальности**, принуждающее законы природы **выглядеть удобным для нас образом (быть**

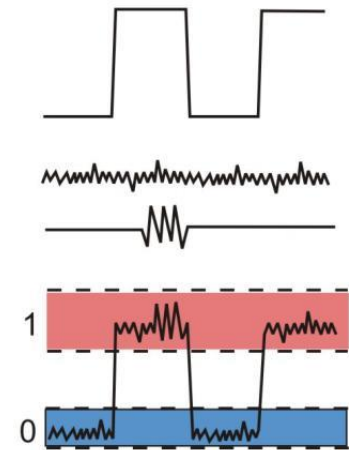
## Пояснения. Прямые и Обратные задачи

- Если известны параметры системы и характер воздействия на них, то можно ставить задачи об писании **функции отклика системы**. Это **прямые задачи**. Такие задачи решаются с помощью алгоритмов
- Если наблюдатель изучает систему по ее отклику на внешнее воздействие и ставит целью **восстановить параметры системы (алгоритм вычисления)**, то это **обратные задачи** их суть **нахождение обратной функции** регрессии т.е. причинно-следственных связей – а именно, **отыскание неизвестных причин** по известным **следствиям**. Эти задачи решаются с помощью:
  - алгоритмов регуляризации (учет законов физики)
  - процессов обучения (методы индукции и дедукции)

# Существенная проблема : искажения наблюдений , вносимые случайными помехами и сами наблюдателем



Аналоговый сигнал



Цифровой сигнал

# Возвратимся к определениям

Поясняющий комментарий: В науке и технике **термин** «**объект исследования**» **обозначает существующее** в окружающем мире

- **явления**, предметы, область знаний, технологии.....
  - Суть **явления** обучения – поддержание «актуального» состояния оператора непрерывного отображения... «данных» на «понятия», которым сопоставляются объекты реального мира. Так, **объектом машинного обучения** являются –
    - компьютерные технологии исследования «многомерных ... «больших данных» с целью построения операторов
      - **регрессии** (прогноза числовых значений), **классификации** (отображения данных в нарративы), **кластеризации** (построения гомоморфных отображений) и др.
- на основе решения специального **класса обратных задач**, для регуляризации решения которых используется априорная информация, полученная с помощью **имплицитных** методов **обучения**

## Уточнение:

В обучении существует *два подхода* :

- **Эксплицитные - с объяснением правил** ( от лат. explicitum – «явно выраженный», «развернутый») на основе ясных понятий, простых и точных правил
- **Имплицитные - без объяснения правил** (от лат. implicitum — «невыраженный», «подразумеваемый») на основе субъективных оценок

И два метода

- само-обучение или от единичного (конкретного) факта – к общему пониманию.
- учителем или от общего понимания – к частному (конкретному) объяснению

**Машинное обучение** – это область компьютерных технологий **автоматизации решения обратных задач** исследования данных, в которых для регуляризации решений используются как

- дедуктивные методы обучения ( на основе логических выводов), которые предполагают формализацию знаний экспертов в виде базы знаний

так и

- индуктивные методы обучения (по прецедентам, опытным путем) на основе выявления общих закономерностей по частным эмпирическим данным

# Итак

Можно сказать то, **что реально существует** - это **объект исследований**, а то, что описывает **как это может существовать** – это **предмет исследований**.

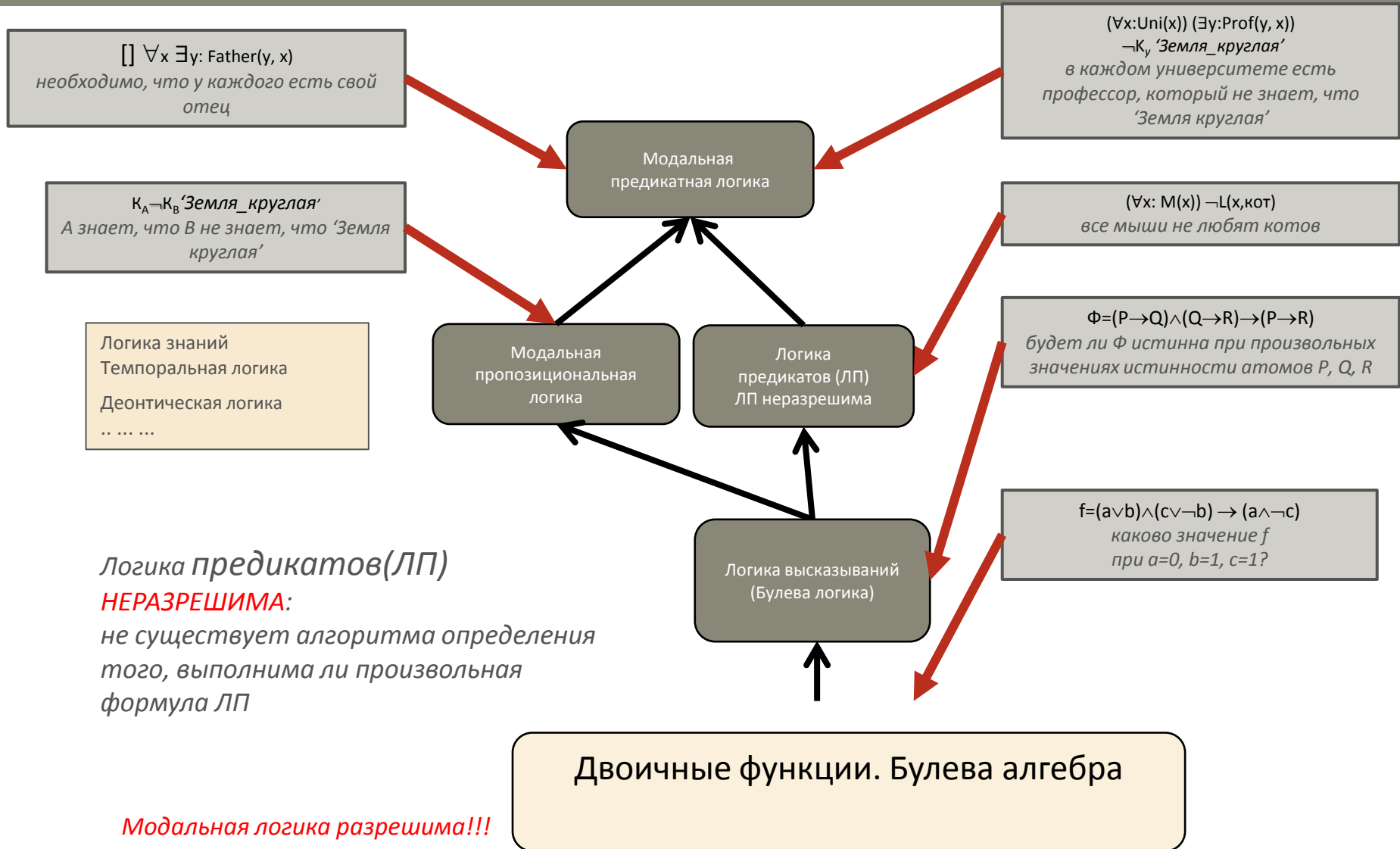
- Например, если рассматриваемая область знаний информационные технологии, то
  - - объектом исследования могут быть – **базы знаний**
  - а
  - - предметом исследования - **методы логического вывода**



# Исторические аспекты процесса обучения: от логики Аристотеля до модальных и нечетких логик .

- **Логика познания Аристотеля: необходимо, возможно, случайно**
- **Логика обучения средние века: должен знать, полагает, было, будет знать, обязательно будет знать, разрешено узнать**
- **Логика актуальности знаний нового времени: «было», «есть» и «будет», «Раньше», «позже» и «одновременно»**
- **Логика истины в философии позитивизма: истинно всегда, «неопределенно», «всегда ложно» или «...более вероятно, чем...»**
- **Методология «машинного» обучения: «логически необходимо», «статистически возможно», «логически невозможно», «...логически следует...»**

# Итак, существует много логик обучения



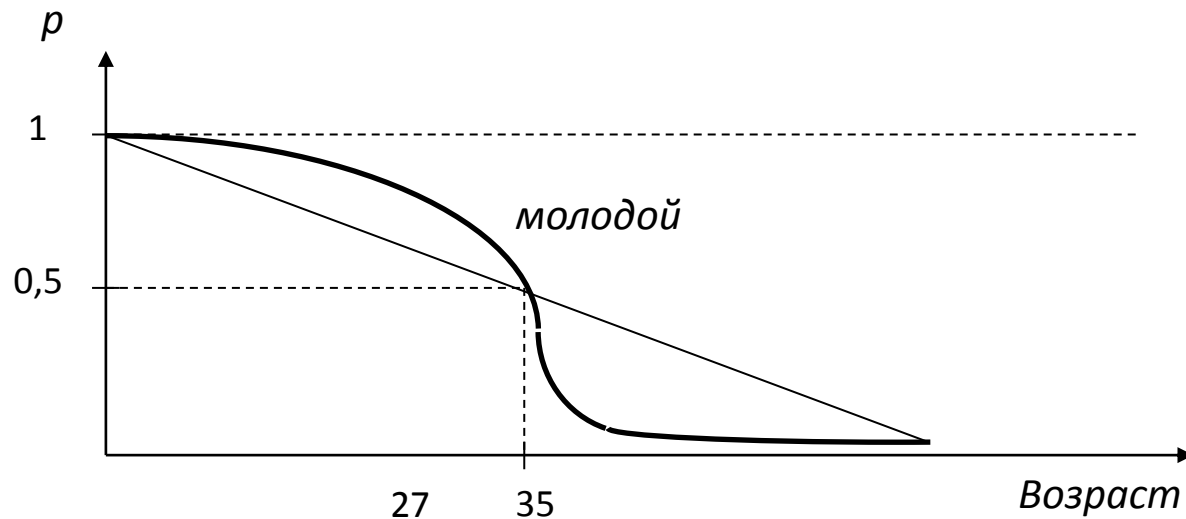
# Проблема формализации и принцип дополнительности

- Не существует одной, “ПРАВИЛЬНОЙ” формализации сложных понятий и явлений. Часто такие понятия определяются несколькими контекстами, т.е. *“Многое — зависит от выбора модели, которая описывает ситуацию”* .
- Формализации явления обучения для различных проблем может отличаться. В физике огромное число базовых понятий определяется с помощью формальных систем или аксиом. Но даже в физике нет точного понятия, например, что есть *“сила”*?
- Применительно к явлению обучения можно утверждать следующее.
  - *Понятие ‘обучение’ в разных контекстах различно: “У каждого свое понимание чему, кого и как надо учить”.*
  - *Более того нет формального понятия “знания” и какова цель процесса обучения.....*

# Функции «нечеткой логики» принадлежности

При использовании нечеткой логики нужно выбрать функцию принадлежности,. Пример: Петру 35 лет. Насколько истинно предположение, что он *молодой*?

Равна ли его «истинность» этого предположения величине 0.5, поскольку он прожил примерно полжизни, или истинность равна 0.6?



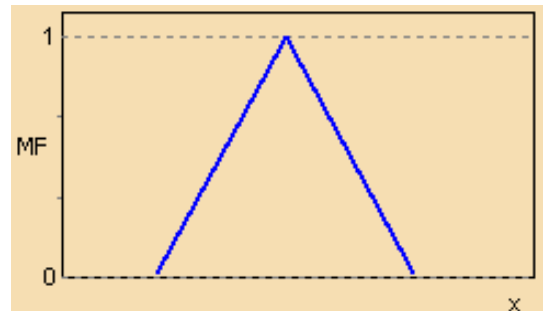
Какова должна быть функция принадлежности, каков должен быть вид графика этой функции (кривая или прямая)?

# Варианты выбора функции принадлежности

Треугольная функция принадлежности определяется тройкой чисел  $(a,b,c)$ , и ее значение в точке  $x$  вычисляется согласно выражению:

$$MF(x) = \begin{cases} 1 - \frac{b-x}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1 - \frac{x-b}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При  $(b-a)=(c-b)$  имеем случай симметричной треугольной функции принадлежности, которая может быть однозначно задана двумя параметрами из тройки  $(a,b,c)$ .

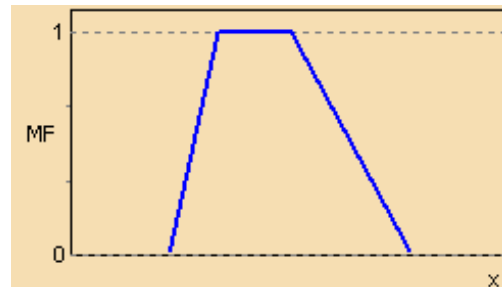


## Варианты выбора функции принадлежности

Аналогично для задания трапецеидальной функции принадлежности необходима четверка чисел (a,b,c,d):

$$MF(x) = \begin{cases} 1 - \frac{b-x}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ 1 - \frac{x-c}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При  $(b-a)=(d-c)$  трапецеидальная функция принадлежности принимает симметричный вид.

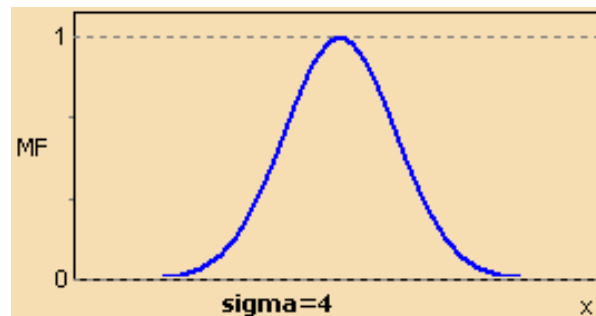


# Проблема выбора функции принадлежности

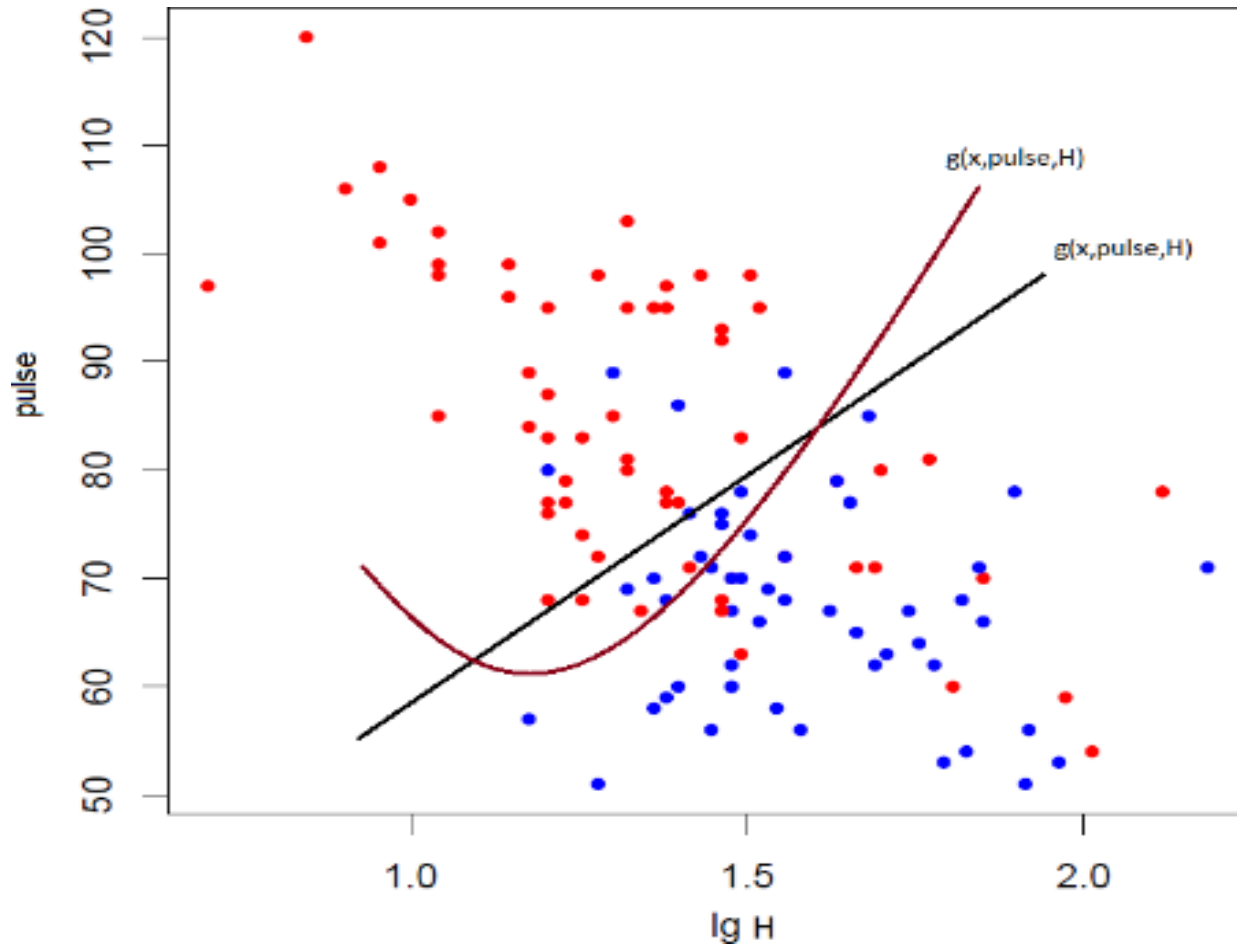
Функция принадлежности гауссова типа (нормальное распределение) описывается формулой

$$MF(x) = \exp\left[-\left(\frac{x - c}{\sigma}\right)^2\right]$$

и оперирует двумя параметрами. Параметр  $c$  обозначает центр нечеткого множества, а параметр  $\sigma$  отвечает за крутизну функции.



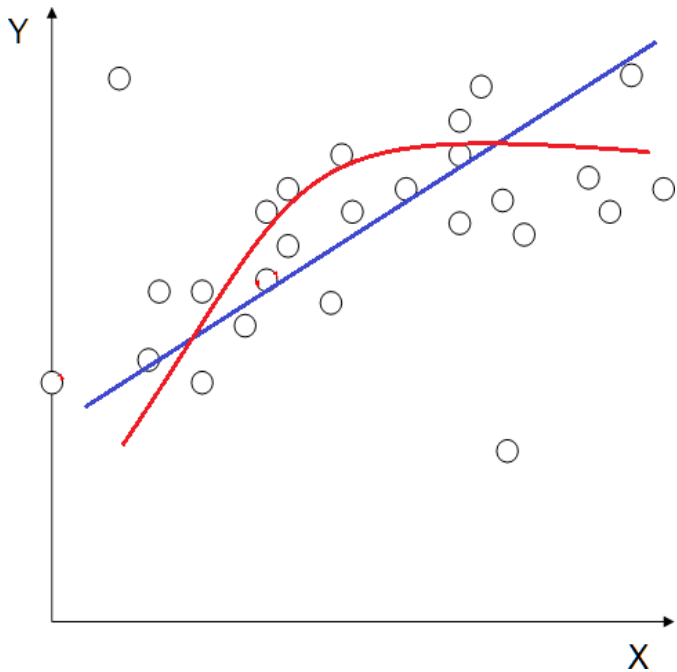
# Модели алгоритмов классификации экспериментальных данных «пульс-давление»



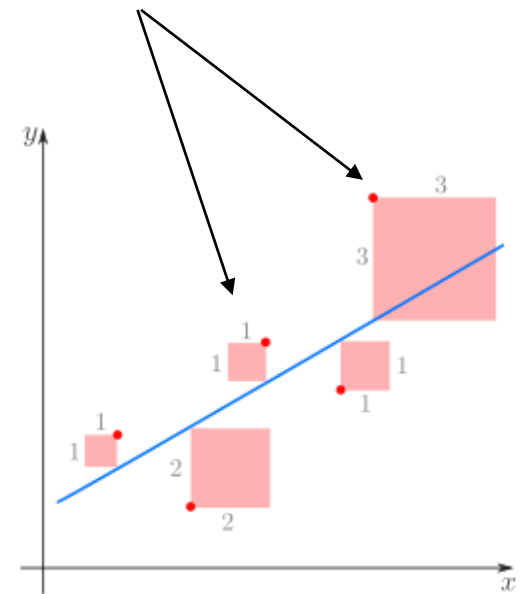
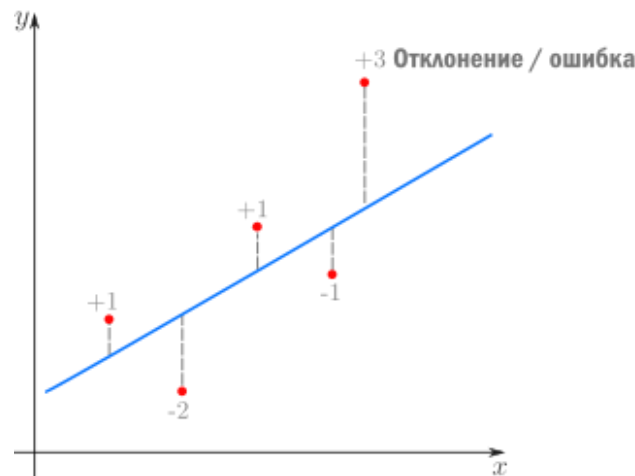
Решение-  
функция  
разделения  $g(x,$   
 $pulse, H)$   
облака  
экспериментальн  
ых данных  
на «больные» и  
«здоровые»



# Модели регрессии – описание «общей» тенденции



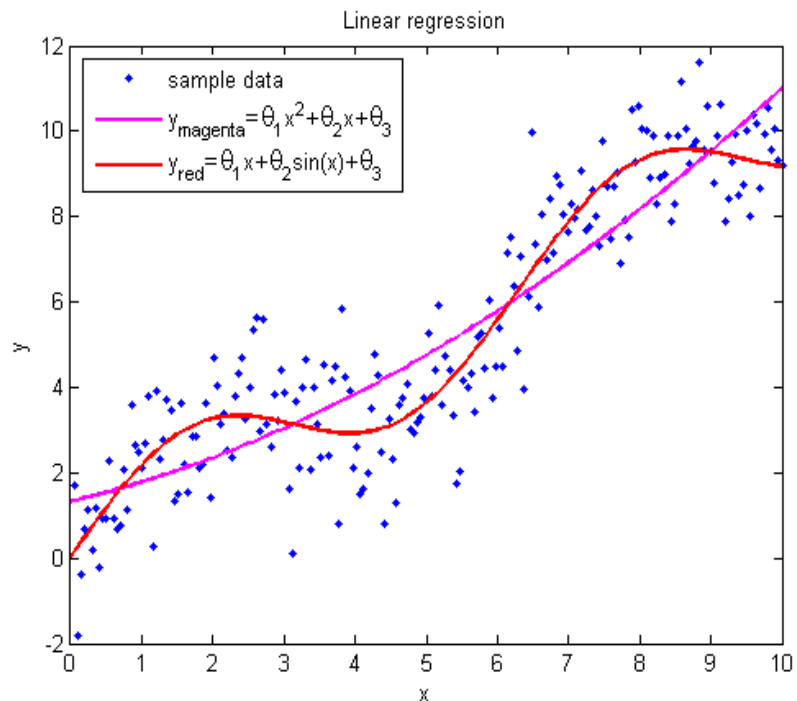
Регрессия — способ выбрать из семейства функций ту, которая минимизирует функцию потерь. Последняя характеризует насколько сильно «функция потерь» отклоняется от значений в заданных точках



# Пример: задача регрессии, синтетические данные

34

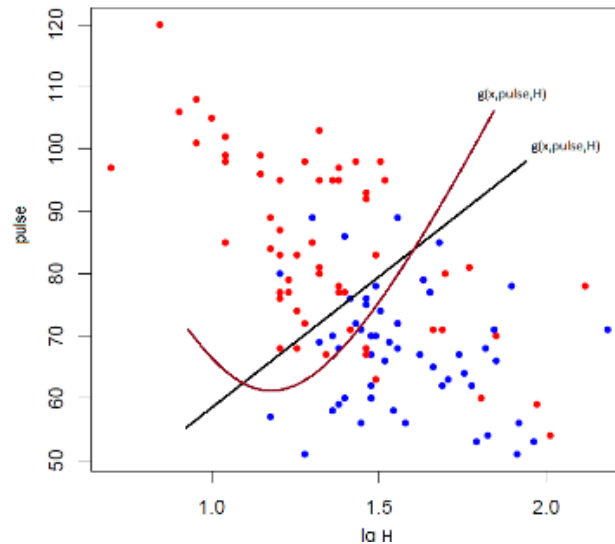
$X = Y = \mathbb{R}$ , число точек  $\rho = 200$ ,  $n = 3$  количество признаков :  $\{x, x^2, 1\}$  или  $\{x, \sin x, 1\}$



наличие признаков (feature generation) усложняет модель, но на практике важно "правильно угадать" уровень сложности модели

# Модель как параметрическое семейство функций

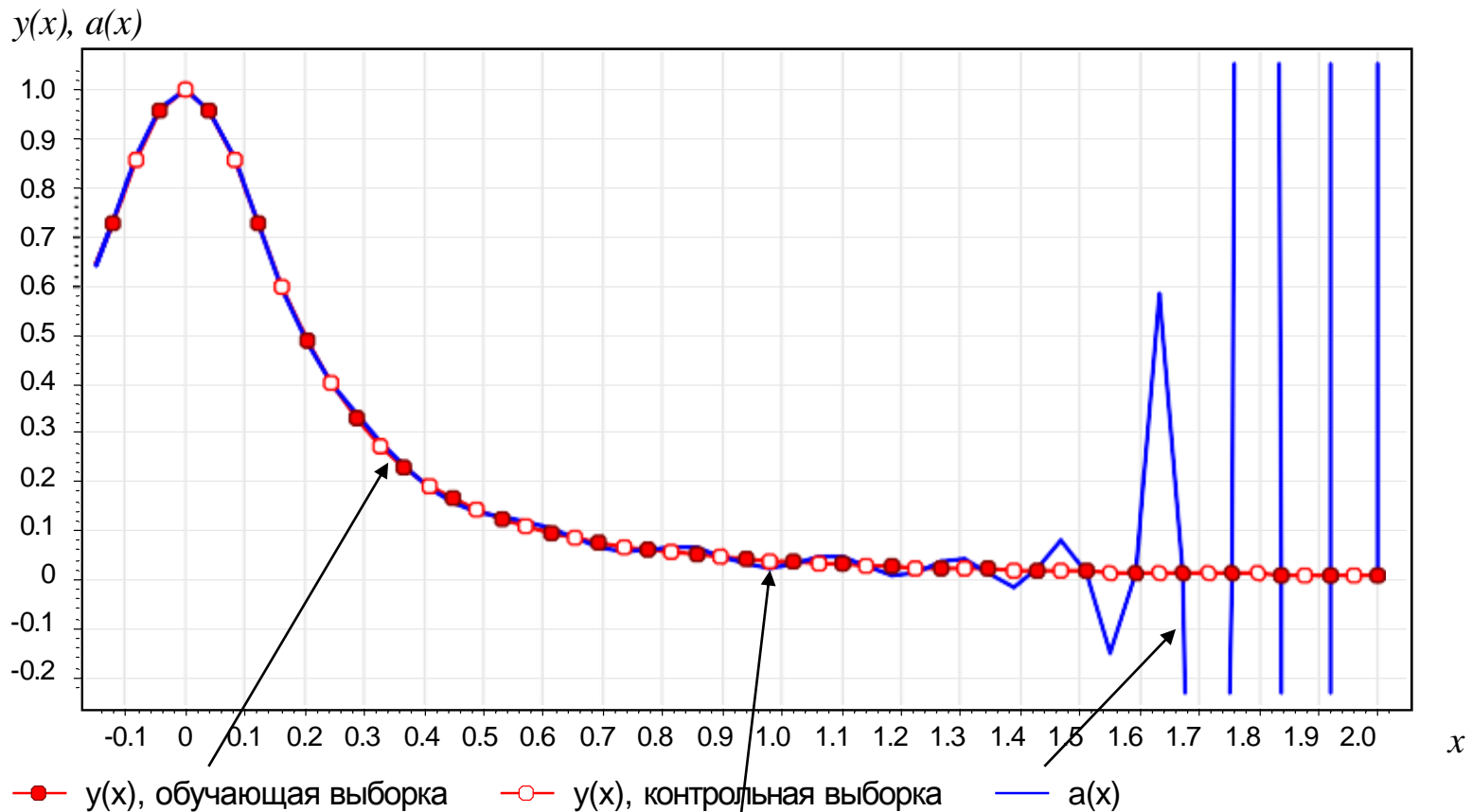
- Моделью алгоритма **a** называется параметрическое семейство функций  $g : X \rightarrow Y$  или  $g(x, \theta)$ , где  $\theta \in \Theta$  параметры в пространстве параметров.
- Процесс подбора оптимальной функции  $g$  и оптимальных параметров  $\theta$  по обучающей выборке называют настройкой (tuning) или обучением (training) алгоритма **a**.



# Проблемы МО: переобучения и не дообучения

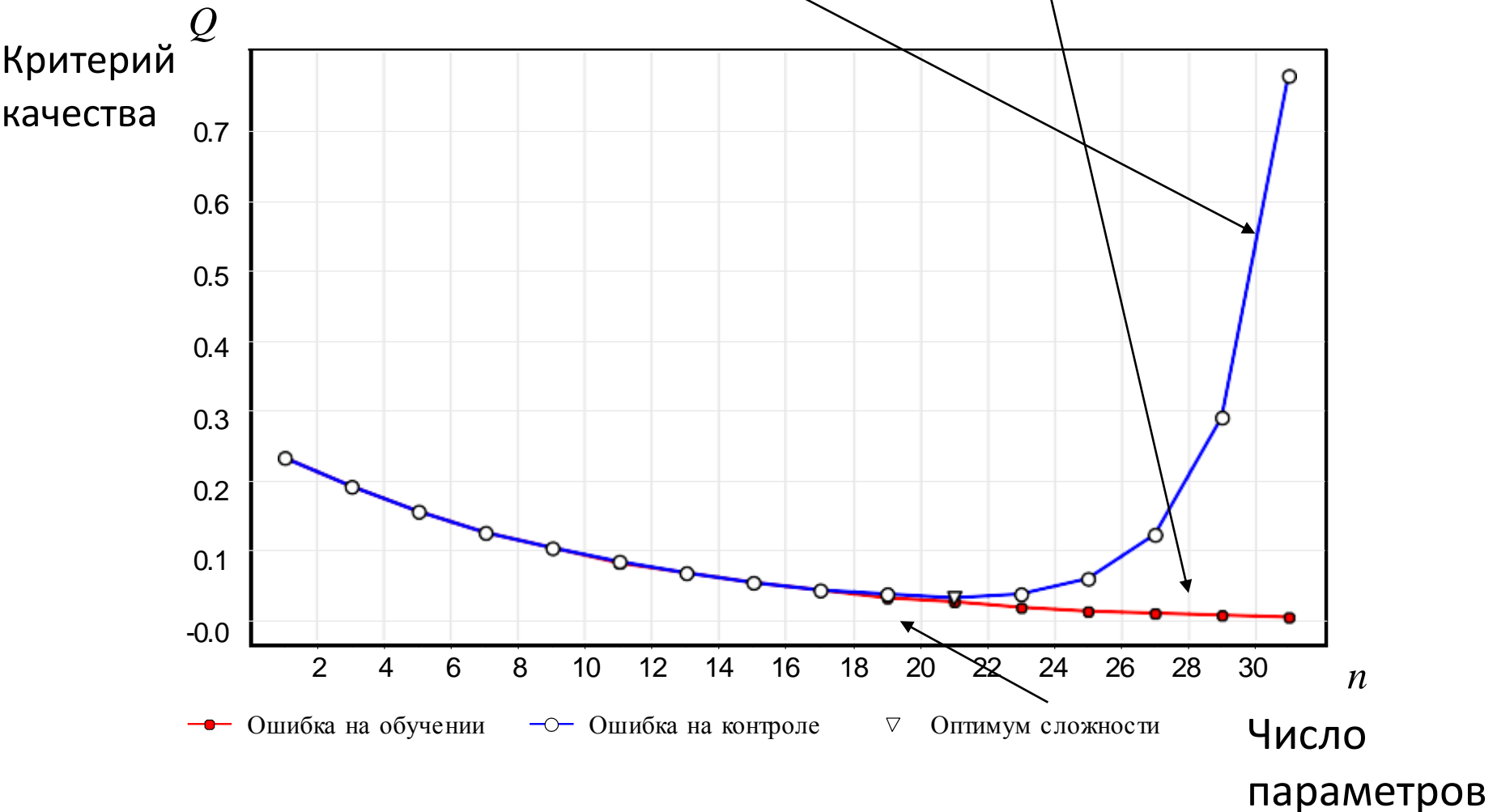
- Переобучение (overfitting) - нежелательное явление, возникающее при решении задач обучения по прецедентам, когда вероятность ошибки обученного алгоритма на объектах тестовой выборки оказывается существенно выше, чем средняя ошибка на обучающей выборке.
- Переобучение возникает при использовании **избыточно сложных моделей**.
  - Не дообучение - нежелательное явление, возникающее при решении задач обучения по прецедентам, когда алгоритм обучения не обеспечивает достаточно малой величины средней ошибки на обучающей выборке.
- Не дообучение возникает при использовании **недостаточно сложных моделей**.

$y(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$ ; Используется для «приближения» полиномом  $a(x)$   
- степени  $n = 38$

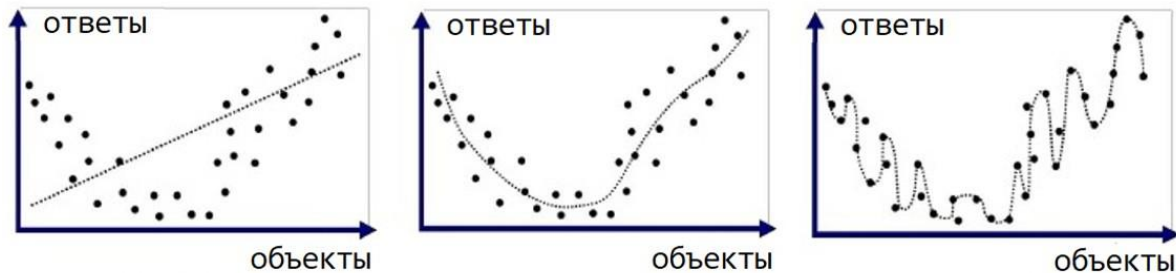


# Пример Рунге. Зависимость критерия качества $Q$ от степени полинома $n$

Переобучение - это когда  $Q(a(X), X^k) \gg Q(a(X), X)$ :

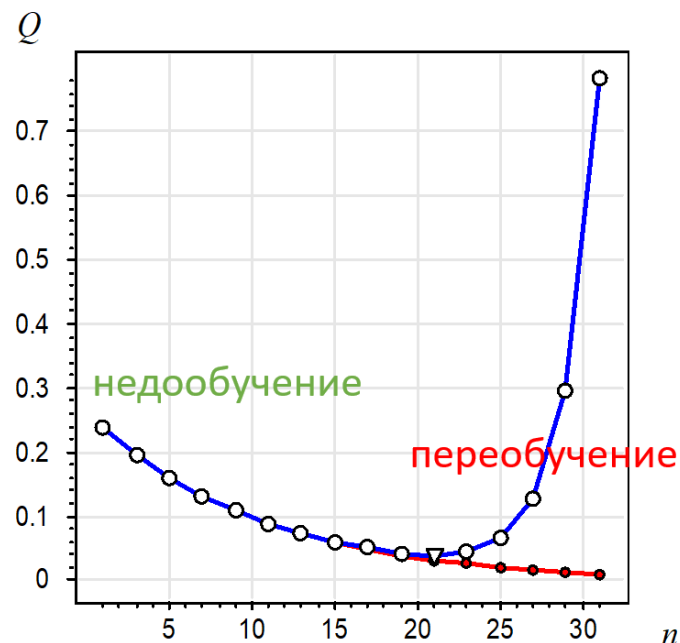


# Проблемы недообучения и переобучения



недообучение    хорошо обученная модель    переобучение

- **Недообучение** (underfitting): модель слишком проста, недостаточное число параметров  $n$
- **Переобучение** (overfitting): модель слишком сложна, избыточное число параметров  $n$



Задачи классификации (classification):

$Y = \{-1, +1\}$  - классификация на 2 класса

$Y = \{1, \dots, M\}$  - на  $M$  непересекающихся классов

$Y = \{0, 1\}^M$  - на  $M$  классов, которые могут пересекаться

Задачи восстановления регрессии (regression):

$Y = \mathbb{R}$  или  $Y = \mathbb{R}^m$

Задачи ранжирования (ranking, learning to rank):

$Y$  - конечное упорядоченное множество



- 1 переобучение есть результат
  - Того, что параметры в модели  $a(x, \theta)$  «расходятся» на чрезмерно точную подгонку под обучающую выборку
  - выбор конкретного  $a$  из  $A$  производится по неполной информации
- 2 Переобучение можно обнаружить
  - Эмпирическим путём разбиения выборки на **train** и **test** (на test должны быть известны правильные ответы)
- 3 Избавиться от переобучения нельзя, но последствия можно минимизировать тем, что
  - накладывать ограничения на  $\theta$  (регуляризация)
  - минимизировать только одну из теоретических оценок
  - выбирать модель (model selection) на основе априорных знаний и «развивать» обобщающие способности моделей (generalization performance)

1. Utkin L.V., Konstantinov A.V. Attention-based random forest and contamination model // Neural Networks. vol. 154, pp. 346359, 2022
2. Utkin L.V., Satyukov E.D., Konstantinov A.V. SurvNAM: The machine learning survival model explanation // Neural Networks, Vol.147, pp. 81-102. 2022
3. Kovalev M.S., Utkin L.V., Kasimov E.M. SurvLIME: A method for explaining machine learning survival models // Knowledge-Based Systems, vol. 203, p. 106164, 2020.
4. Kovalev M.S., Utkin L.V. A robust algorithm for explaining unreliable machine learning survival models using the Kolmogorov-Smirnov bounds // Neural Networks, vol. 132, pp. 1-18, 2020.
5. Konstantinov A.V., Utkin L.V. Interpretable machine learning with an ensemble of gradient boosting machines // Knowledge-Based Systems, vol. 222, p.106993 2021.
6. Utkin L.V., Zaborovsky V.S., Kovalev M.S., Konstantinov A.V., Politaeva