КАФЕДРА
ТЕЛЕМАТИКА

Санкт-Петербургский
Государственный
Политехнический
Университет

Институт прикладной
математики и механики

История и методология математики и компьютерных наук

Лекция 5

Тема 2. **Математика природы.**

умопостигаемые vs вычислимые истины

---

6 октября 2022 г.

Что было на прошлой лекции

- "Бог создал натуральные числа, а математики придумали всё остальное» *Л. Кронекер*
- Число в «общем смысле» – элемент поля не обязательно «числового»….. числа Фибоначчи, золотое сечение, …эти числа не отделимы от структуры объектов реальности.
- Числа в компьютере – аппаратная реализация некоторой систем счисления. Преобразования систем счисления, например, «двоичная ⇄ десятичная», приводит к тому, что количество двоичных разрядов в машинном представлении целого числа будет больше количества десятичных разрядов в его видимом (печатном) представлении.
- Число с плавающей запятой является машинным представлением действительного числа записанного в экспоненциальной форме содержит «погрешности» - представление числа 1/6 имеет погрешность уже в 7 цифре дробной части для процессоров одинарной точности и в 16 цифре для двойной точности……Итак, **результат вычислений зависит от разрядности представления чисел**

Тема текущей лекции

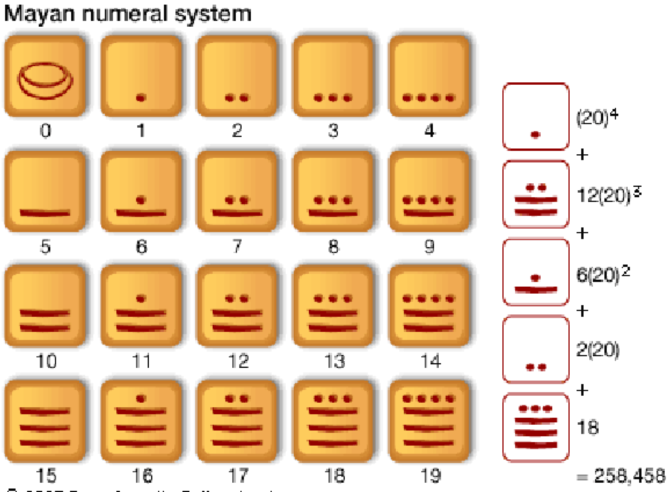
- Тема 1. Методология математики. История развития математики как фундаментальной и прикладной науки. Числа, слова и операции. Место математики в современной системе научных знаний. Основные принципы, теоремы и структуры.

- **Тема 2. Математика природы.** Умопостигаемое и вычислимое число
  - **Проблемы** формализации знаний, коордитнатизация, целостность, интерпретация понятий
  - **Приоритеты** от алгоритмов вычислений функций к решению обратных задач – построению алгоритмов, «открытых» к изменениям
  - **Проблема устойчивости** «рациональных» решений,
  - **Частичная «рациональность»** - фактор рандомизации и формирования частично-рекурсивных функций предпочтения

Символ числа или образ объекта: к проблеме «кодирования» понятий

Эвклид: «Единица есть то, в соответствии с чем каждая из существующих вещей называется одной. Число есть множество, сложенное из единиц».

Образец письменности майя (по Ю.В. Кнорозову)



это фонетическое письмо, в котором каждый графический символ связан со звучанием.

Метод расшифровки текстов майя: «позиционная статистика».

Исходная методология Ю. Кнорозова: перед тем, как начать дешифровку нужно определить, к какому типу письма принадлежит текст:

- фонетический (знак = звук; русский и все европейские языки)
- слоговый (знак = слог; древнеиндийское письмо)
- образный (знак = слово/корневая основа/образ; китайские и прочие иероглифические языки)

У каждого типа письменности разное количество неповторяющихся самостоятельных элементов. В фонетических азбуках их порядка 30–40, в слоговых около 300–350, а в иероглифических языках для полноценного чтения и понимания текстов нужно знать как минимум 5 000 знаков с точным значением. Чтобы определить тип письма, необходимо иметь единый связанный текст, не менее 5000 знаков длиной.

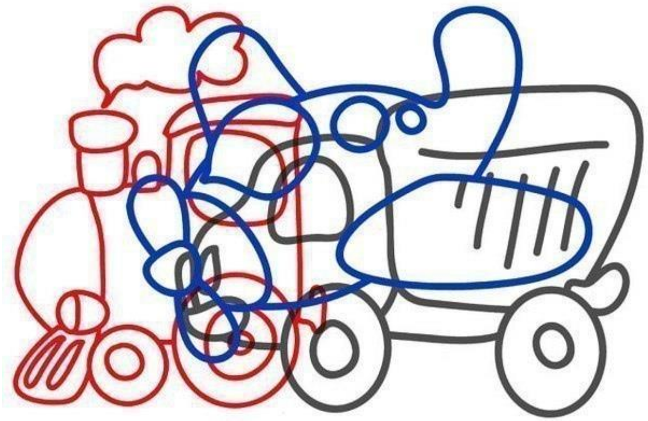
Суть открытия: в текстах майя встречается 355 самостоятельных знаков, следовательно, данную письменность следует считать слоговой. **Ограничения:** «звук» буквы, а не ее «название».

Математические интерпретации формальных теорий

теорема Лёвенгейма-Скулема: любая теория не более чем счётной сигнатуры имеет элементарную счетную подмодель.

- Например, теория вещественных чисел имеет подмодель - упорядоченное поле рациональных чисел (в нем действует линейный порядок, который порождается отношением «меньше или равно»)
- Поэтому, никакая аксиоматическая теория не может быть категорична. Всегда найдётся интерпретация, совершенно не похожая на ту, ради которой эта теория создавалась.

Комментарий к теореме



Какой атрибут реальности «шифрует» (скрывает) зашумленная «картинка», зависит от выбираемого способа наблюдения.

Важность сознательного выбора в формировании проявленной реальности описывает Джон Уиллер в эксперименте отложенного выбора, :

- «Природа— это не машина, идущая «своим» путем. Ответ, который мы получаем, зависит от того, **какой вопрос мы ставим**, какой эксперимент мы устраиваем, какой регистрирующий прибор мы выбираем. Мы неизбежно вовлекаемся в то, что оказывается происходящим.

Суть проблемы: почему математической формулы нет, а есть только алгоритм вычисления

- …Алгоритм – это «конечный продукт математики», но существует множество задач, для которых не существует алгоритма решения…в рамках **«умопостигаемого» набора понятий** (10-ая проблема Гильберта, квадратура круга…).
- Почему ? нужен новый язык «для умопостигания» алгоритма ?
- Проблема: алгоритмов бесконечно много, процесс умопостигания «единственный» ?
- В настоящее время создана «теория алгоритмов» как часть «математической логики», но… это лишь теория «цифровых алгоритмов»…которые «доставляют решения» в виде рациональных чисел (конструктивных объектов).
- Так, «иррациональные числа не являются «вычислимыми», но умопостигаемые». …Функции из N в N –не все являются конструктивными объектами (т.е. не заданы на всех значениях аргументов)

О понятии «конструктивный объект»

Определение 1.

Конструктивным пространством называется множество всех конструктивных объектов одинакового вида.

Определение. 2 .

Вычислимой функцией называется функция из одного **конструктивного пространства в другое конструктивное пространство (т.е** существует алгоритм, позволяющий по описанию любого аргумента получить описание значения функции на этом аргументе)

Рекурсивные функции и множества – вычислимые конструктивные объекты

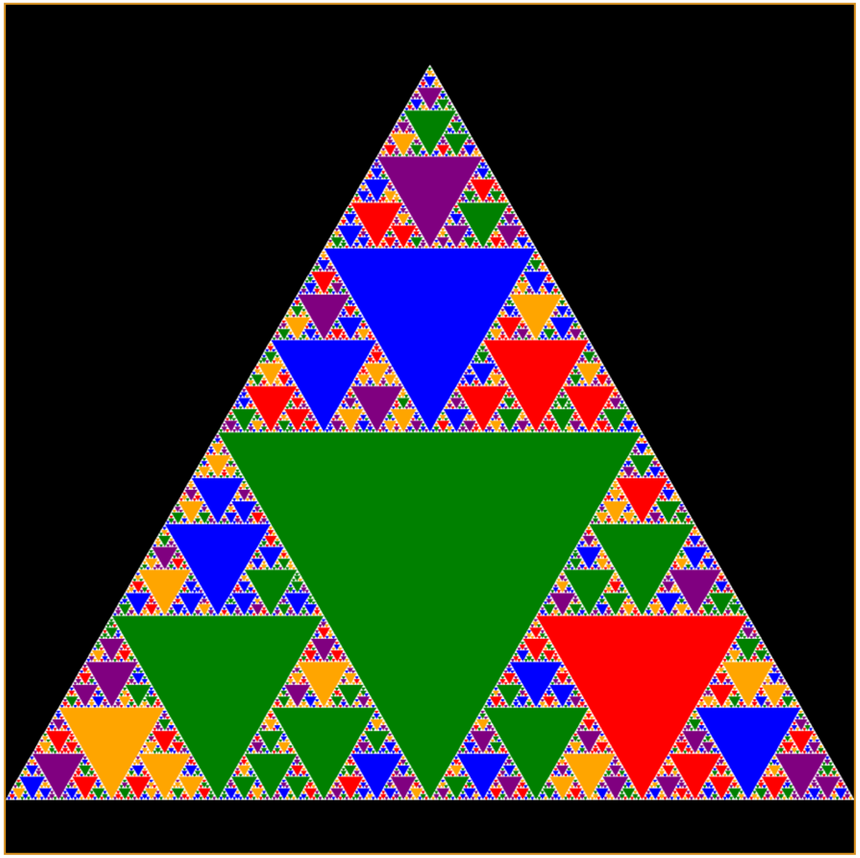
Определение: Под рекурсивным определением объекта (как в абстрактном теоретическом смысле, так и в аспекте практического программирования) будем понимать такое определение, которое содержит внутри себя ссылку на определяемый объект.

Основные видами объектов, которые будут использоваться при рекурсивных вычислениях, следующие:

- функция;
- множество;
- тип.

Определение рекурсивных объектов происходит по индукции

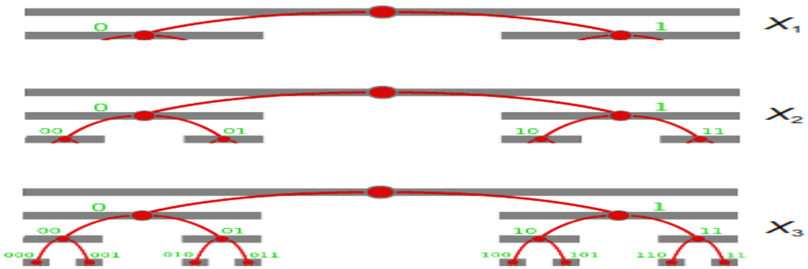
Примеры рекурсивных множеств

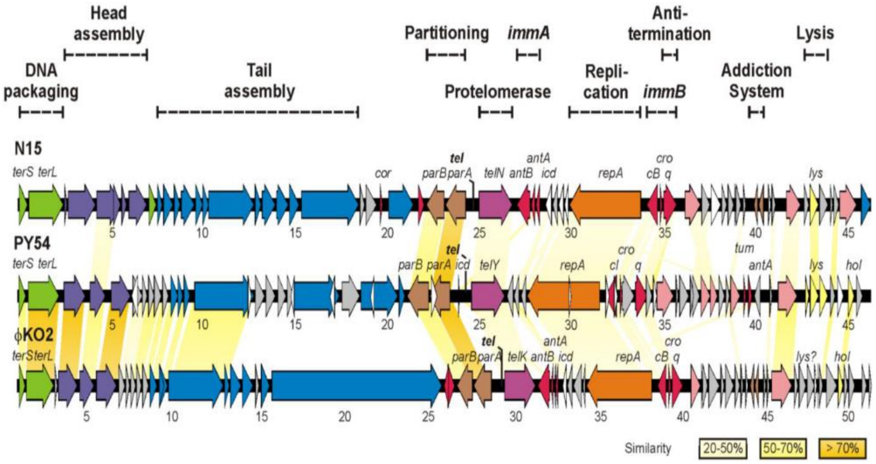


Построенные вырезанием

Множество Кантора

Ковер Серпинского





Еще одна фундаментальная проблема

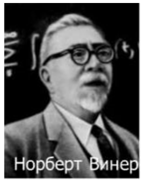
Как формулировать задачу (выбрать целеполагание), чтобы задача имела алгоритмически вычислимое (т.е. рациональное) решение, представимое с помощью чисел (функций) или …. понятий.

Аспекты технологий: построения гомоморфного (т.е. с потерей информации) отображения (функтора) категорий на входе в категории на выходе компьютера (категории – математические объекты, а элементы категорий можно рассматривать и как морфизмы (операции), которые следуют правилам композиции (для входа и выхода они разные) и как элементы множества.).

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h\circ(g\circ f)=" ', "=(h\circ g)\circ f" ' {yshift=-10pt}] \arrow[dr, "g\circ f"] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dl, "h\circ g" '] \\
D & C \arrow[l, "h"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "id_A"] \arrow[dr, "f" '] & A \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f"] & \\
& B \arrow[r, "id_B"] & B
\end{tikzcd}$$

(цитата из аннотации доклада : …. future discoveries may be even more surprising than the conclusions of relativity or quantum mechanics, confirming the thesis of A. Clarke that "advanced technology is indistinguishable from magic).



Если магия вообще способна даровáть что-либо, то она дарýет именно то, что вы попросили, а не то, что вы подразумевали. **Н. Винер**

Конструктивное представление алгоритмов

- Для современных программных автоматов (машин Тьюринга) – представление алгоритма - суть «статический» граф, вершины, которого состоят из частично-рекурсивных функций, «точно вычисляющих» на множестве входных «данных» направления их «перемещения» по дугам графа; Сами решения –рациональные числа конечной разрядности ;
- Для современных систем машинного обучения: представление алгоритмов - многослойная нейроморфная структура, используемая для «приближенного вычисления» путем «маршрутизации» входного потока данных функции целеполагания, которая задана на множестве понятий.

Рационализм – достоверное знание м.б. получено только из «самого разума» – теории (Р. Декарт)

Всякая **непротиворечивая теория** первого порядка неполна (К. Гедель) – суть истины в неполноте !?

Пример: магия «частичной» формализации

Дано: $$\frac{1+\sin x}{n} = \frac{1\cancel{+}\sin x}{\cancel{}\ n} = 1 + \text{six}$$
$$= 7$$

Почему так ☺

$$\frac{1+\sin x}{n} =$$
$$= \frac{1+\text{si}\cancel{\text{n}}\,x}{\cancel{n}} =$$
$$= 1 + \text{six} =$$
$$= 7$$

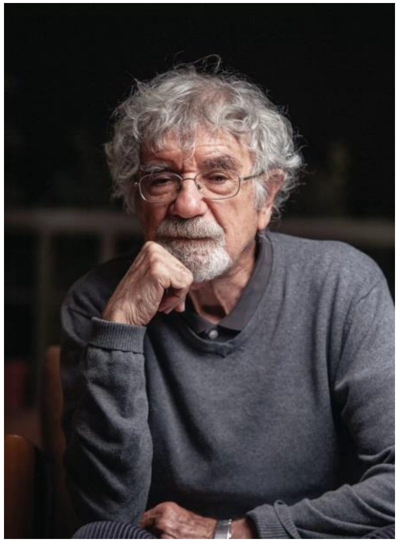
Или : дано предложение **«1 плюс три = 4»,**

Может ли программный автомат вычислить “правильное” решение» ?

Проблема интерпретации решений

Умберто Матурана: Познать можно лишь то, что логически доказуемо….или вычислимо (имеется алгоритм или код вычислений).

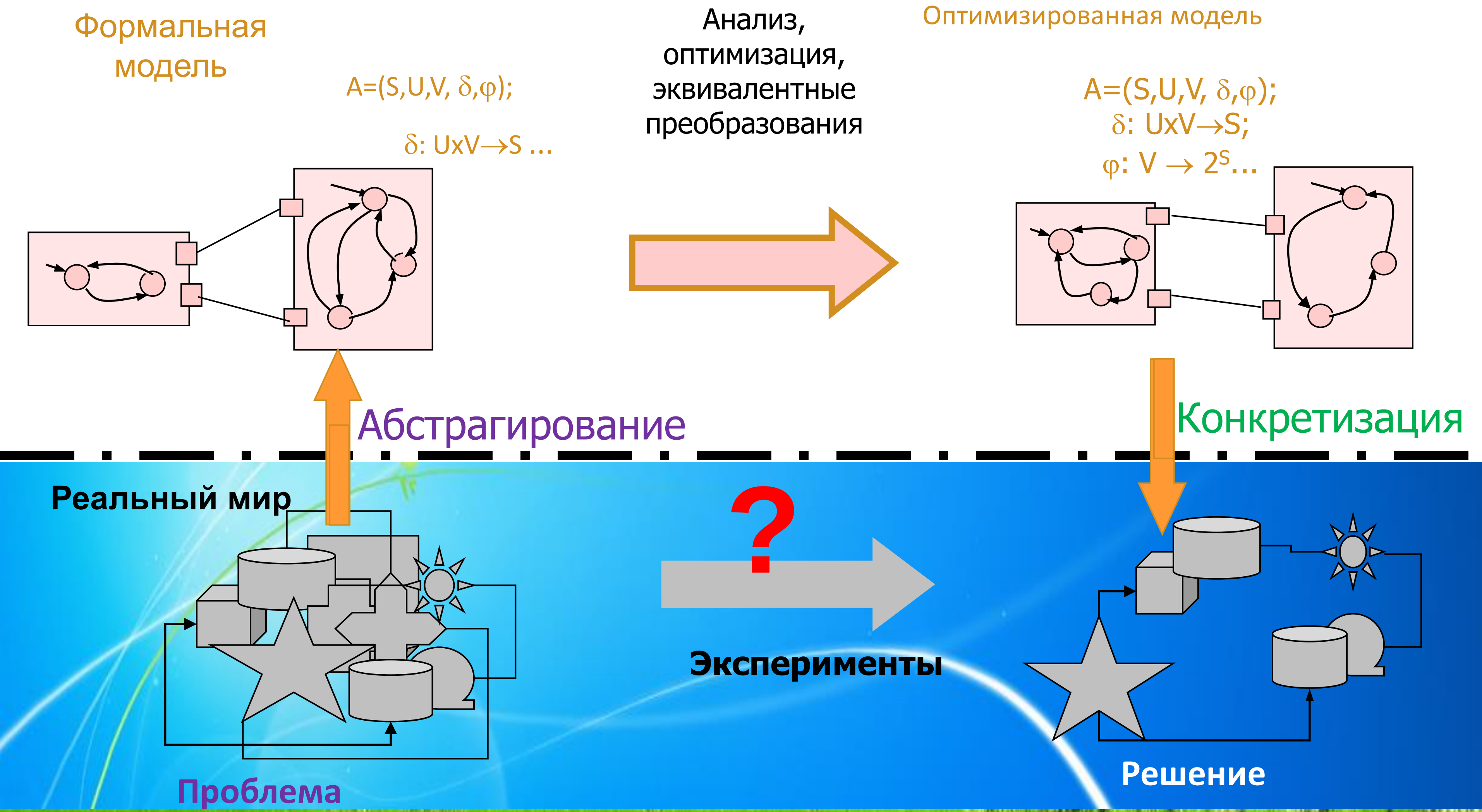
«Биология познания» (1970)



Современная модель «знаний» основана на законах формальной логики:

- если высказывание логически доказуемо, оно истинно (доказательств лжи не существует);
- логическое противоречие недоказуемо и т.п.
- если высказывание истинно, то неверно, что его отрицание также истинно.

Парадигма решения инженерных проблем с использованием формальных моделей



Формальная модель

$A=(S,U,V,\delta,\varphi);$

$\delta: U x V \rightarrow S$ ...

Анализ, оптимизация, эквивалентные преобразования

Оптимизированная модель

$A=(S,U,V,\delta,\varphi);$

$\delta: U x V \rightarrow S;$

$\varphi: V \rightarrow 2^S$...

Абстрагирование

Конкретизация

Реальный мир

?

Эксперименты

Проблема

Решение

Суть «формализации» – нарушение натуральной коммутативности

- *Есть утверждение:*
- *Джон умер, и его похоронили.*

для формализации этого утверждения **классическая логика неадекватна**:
так из “Джон умер, и его похоронили не следует “Джона похоронили, и он умер”.

Имеет место нарушение коммутативности:

Средства координатизации истины в контексте модальности: ‘*всегда*’, ‘*верю*, ‘*разрешено*’, ‘*знаю*’, ‘*когда-нибудь в будущем*’, … …

характеризация истины или модальность

Вася --- болен.

будет когда-то ….

- врач знает, что
- в будущем всегда будет
- был когда-то …..

1. всегда был ….

- имеет право быть больным
- я считаю, что …..

… …

Обозначения:

[] φ = φ - `*сильная*’ характеризация истины φ (*необходимость*)

◊ φ = φ - `*слабая*’ характеризация истины φ (*возможность*)

- В модальной логике ‘**сильные**’ и ‘**слабые**’ характеризации истины обозначаются одинаково:

‘*сильная*’ характеризация истины [] *”Вася болен”*

‘*слабая*’ характеризация истины ◊ *”Вася болен”*

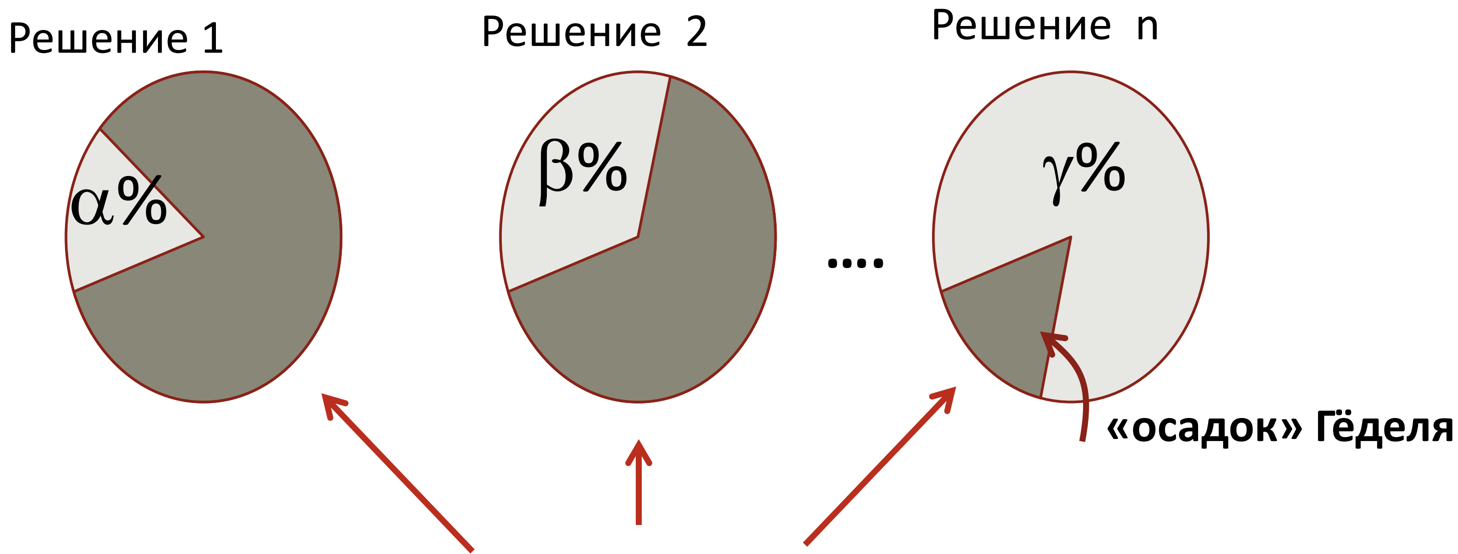
Пример: Проекционная семантика

Что надо: перейти от «формальных» алгоритмов к «открытым» решениям.

Теорема Геделя (свободная формулировка) утверждает

Все формальные (математические, формальные) системы (построены с использованием арифметики) любой сложности неполны, то есть в рамках этих систем **существуют утверждения (решения)**, которые **истины**, но этот факт **не может быть доказан** средствами самой системы.

«Информационный пепел» формализации или «сухой осадок» Геделя



Доля «**проблемы**», которая алгоритмически (формально/математически) **разрешима**

Система/проблема

↑ ↓

внешняя среда

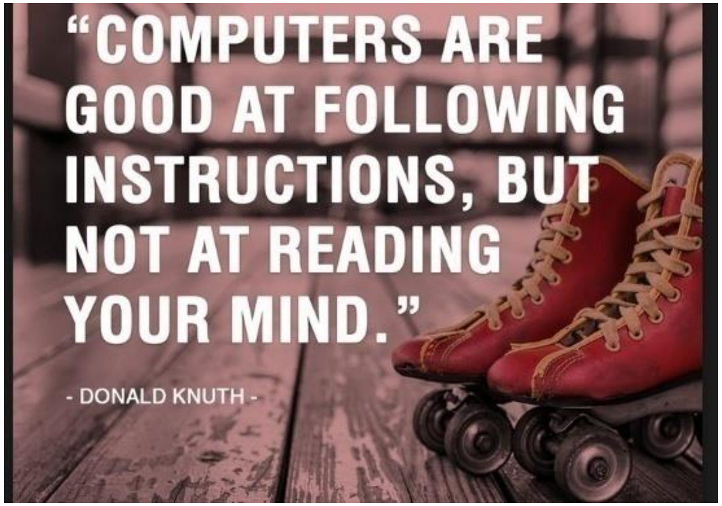
Темпоральное соотношение «неопределенности»:

$RealTime_{\text{система}} << RealTime_{\text{среда}} \rightarrow$ алгоритм (ЭВМ)

$RealTime_{\text{система}} < RealTime_{\text{среда}} \rightarrow$ АСУ(ЭВМ+человек)

$RealTime_{\text{система}} \sim RealTime_{\text{среда}} \rightarrow$ интеллект (Человек)

Цитаты классиков - Дональд Кнут:



“COMPUTERS ARE GOOD AT FOLLOWING INSTRUCTIONS, BUT NOT AT READING YOUR MIND.”

- DONALD KNUTH -

Это проявления глубокой концептуальной проблемы программирования:
невозможно разработать сложную программу без ошибок.

ИТАК: computo ergo sum….

В реальности **существуют «не вычислимые» истины** (свойства эмержентности, процессы «становления», интуиция, целеполагнание не вычислимы)

Поэтому современное рациональное компьютерное мышление нуждается в фундаментальной доработке:

К концепции «Существует то, что я могу вычислить с помощью алгоритма» или computo ergo sum

Необходимо добавить новые механизмы обучения алгоритмов в процессе его исполнения или бифуркации потока данных за счет рандомизации операций, учета опыта или анализа прогнозов.

Бифуркации «рациональных» решений как источники «нерациональности»

Считается: что если задача имеет рациональное алгоритмическое решение, то это решение характеризует процесс увеличения некоторых формальных показателей, отражающих то или иное предпочтение пользователя.

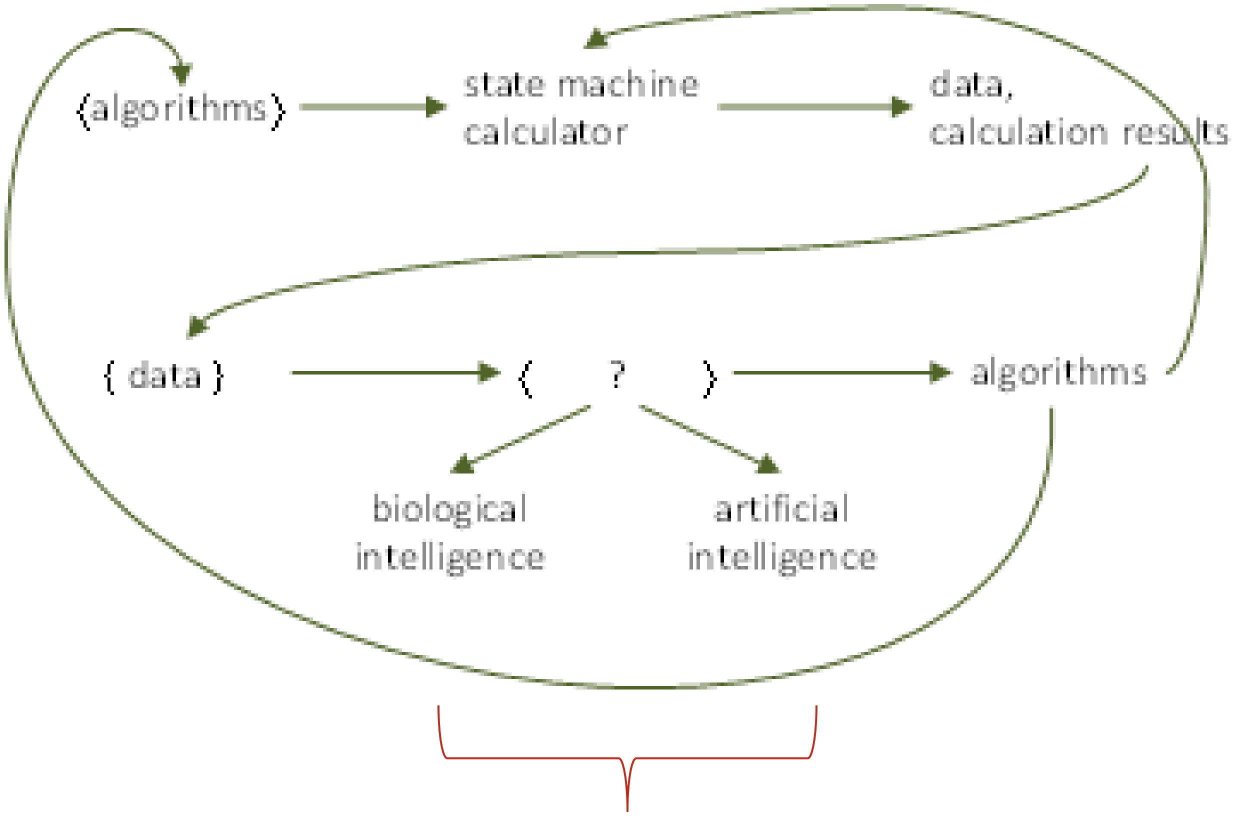
- Однако, для многих прикладных задач сформулировать в явном виде критерии предпочтения в формальном виде нет возможности, судить о свойствах получаемых решений на основе критериев – задач экспоненциальной сложности.
- При этом могут образовываться «циклы предпочтения», которые можно рассматривать как источник нерациональности принимаемых решений.

.

Алгоритмы принятие решений в условиях ограниченных ресурсов

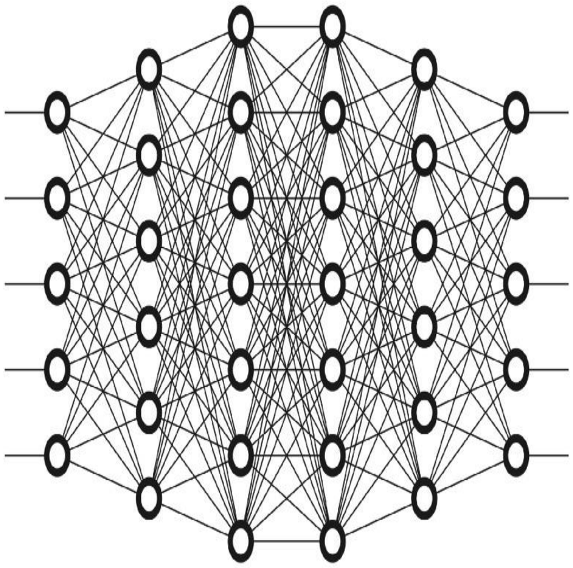
- **Ключевым фактором,** который мешает принятию рациональных решения является:
  - недостаток информации для принятия такого решения. Сбор и обработка информации может требовать затрат. затраты на поиск информации могут превышать выгоду от нахождения лучшего варианта.
  - когнитивные искажения того, кто «заказывает» решение: в этом случае даже наличие информации не ведет к правильной ее оценке
- **Задачи, несущее множество которых содержит неопределенные данные, алгоритмически не разрешимы, т.е. не могут иметь точного рационального** решения
- **На практике требуются решения «ограниченной рациональности или РОР ». РОР –** класс теоретических **решений**, которые учитывают параметрическую ограниченность ресурсов, используя «внешние» по отношению к аксиомам теории факторы .

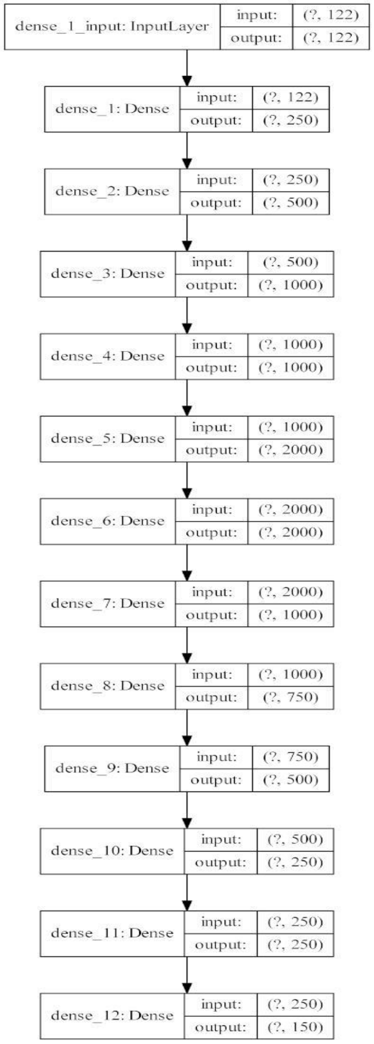
Формальна диаграмма принятия решений



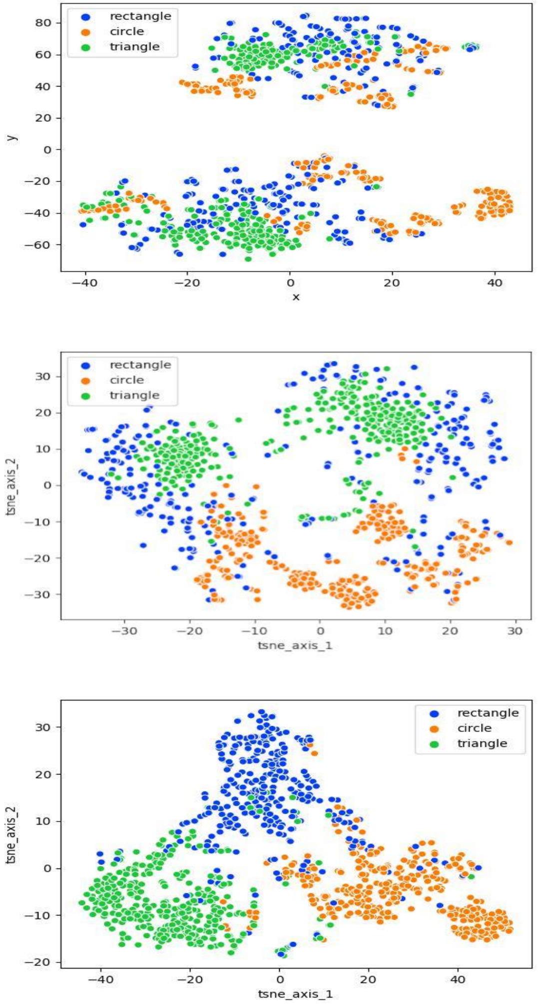
Композиция формальных и когнитивных решений

Сходимость решений в «пространстве состояний» нейронной сети





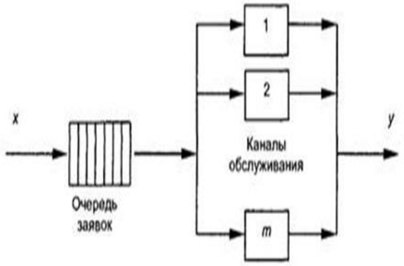
dense_1_input: InputLayer	input:	(?, 122)
	output:	(?, 122)
dense_1: Dense	input:	(?, 122)
	output:	(?, 250)
dense_2: Dense	input:	(?, 250)
	output:	(?, 500)
dense_3: Dense	input:	(?, 500)
	output:	(?, 1000)
dense_4: Dense	input:	(?, 1000)
	output:	(?, 1000)
dense_5: Dense	input:	(?, 1000)
	output:	(?, 2000)
dense_6: Dense	input:	(?, 2000)
	output:	(?, 2000)
dense_7: Dense	input:	(?, 2000)
	output:	(?, 1000)
dense_8: Dense	input:	(?, 1000)
	output:	(?, 750)
dense_9: Dense	input:	(?, 750)
	output:	(?, 500)
dense_10: Dense	input:	(?, 500)
	output:	(?, 250)
dense_11: Dense	input:	(?, 250)
	output:	(?, 250)
dense_12: Dense	input:	(?, 250)
	output:	(?, 150)



Завершения процесса обучения оцениваться на основе анализа структуры аттрактора вектора состояний слоев нейронной сети

Пример: СМО – решения ограниченной рациональности

Каналы обработки



Дано:
потоки
заявок
(пакетов)
на входе
СМО

Анализируется работа двухпотоковой системы массового обслуживания с буфером конечной емкости. Первый поток считается высокоприоритетным и обладает абсолютным приоритетом по обслуживанию,

- Для «открытия» алгоритма обслуживания введем **вероятностный выталкивающий механизм** - вновь подошедшее высокоприоритетное требование, заставшее накопитель полностью заполненным, имеет право вытеснить оттуда одно из низкоприоритетных требований, **но… лишь с заданной вероятностью α.**

Пример: Аудио-видео связь с бортом МКС

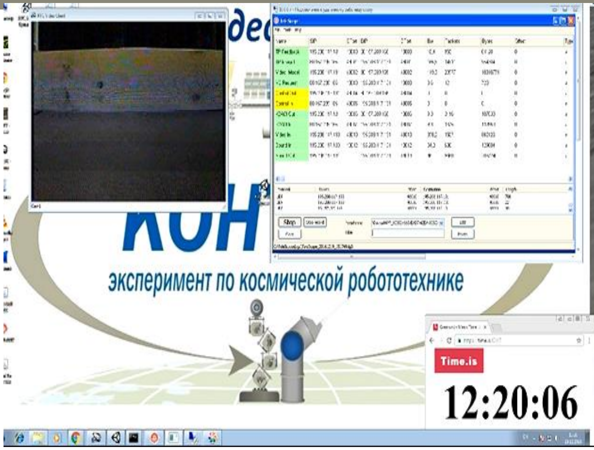
Телемост МКС – DLR - ЦНИИ РТК

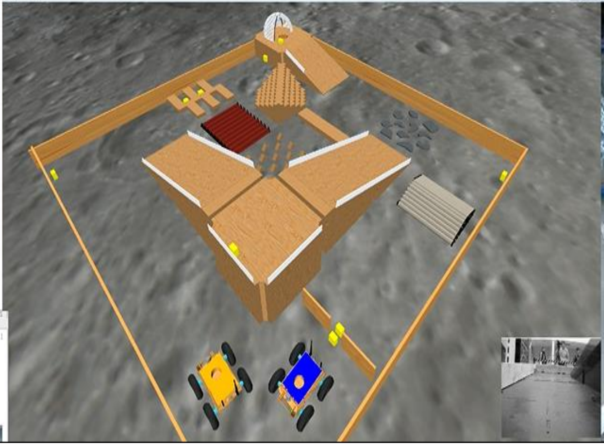
Sony HVR-Z7E HD/SD

- **Наблюдение действий** космонавта во время сеанса
- **Двусторонняя голосовая связь** для оперативного управления сеансом
- Телемосты в **PR-акциях**

Сеанс 19/12/2017: ЦНИИ РТК - МКС

Пример: Проведение сеансов телеуправления группой мобильных роботов с борта МКС (КЭ «Контур»)

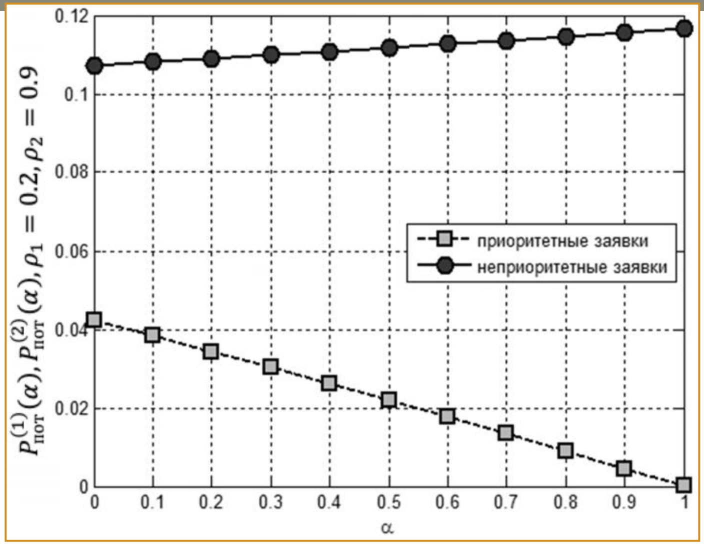


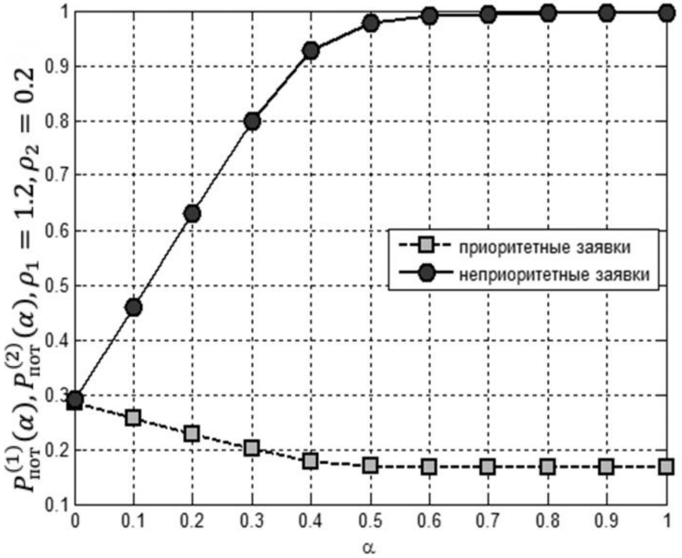


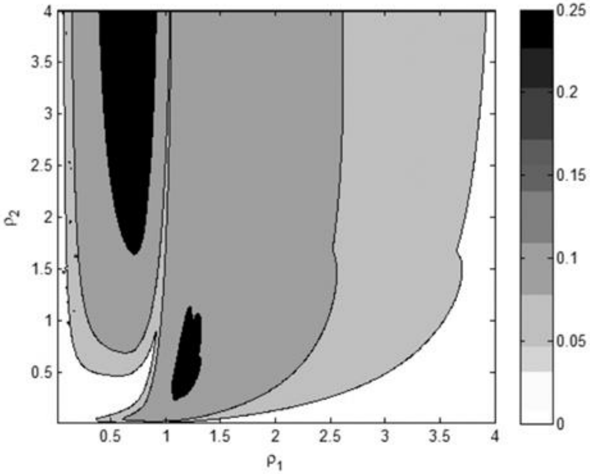
Состав пульта управления

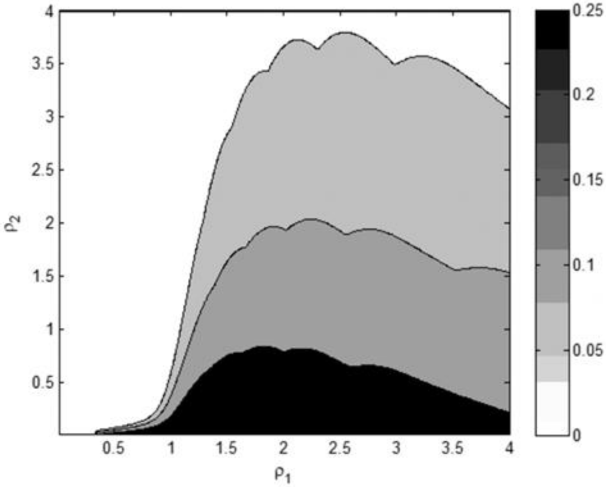
- Север Vicon
- Сервер управления
- Видеосервер
- Видеудублёр
- АРМ наземного оператора

Эффект от «открытости» алгоритмов СМО









Зоны «управляемости» процесса обработки заявок в условиях ситуационной неопределенности путем настройки вероятностью α.

Заключение

- Идея анализа когнитивных решений ограниченной рациональностью в терминах вычислимых функций может быть основана на процессе «машинного обучения», который «синтезирует» алгоритмы вычисления без формального определения и целей.
- «Экзоинтеллектуальная» концепция формирования когнитивных решений ограниченной рациональности охватывает как формальные, так и прикладные аспекты проблемы, что позволяет преодолеть ограничения классической теории алгоритмов, в частности, невычислимую проблему «остановки», путем рандомизации результатов вычислений.
- Направления дальнейших исследований: поиск «когнитивных» решений в «пространстве состояний с 3D временем», т.е. вычисления «текущих» решений на основе данных 1) предыдущего опыта, 2) оперативных измерений и 3) результатов прогнозов возможных последствий.