КАФЕДРА
ТЕЛЕМАТИКА

Санкт-Петербургский
Государственный
Политехнический
Университет

Институт прикладной
математики и механики

История и методология математики и компьютерных наук

Лекция 4

Тема 2. **Математика природы. Проблемы формализации знаний, рекурсия как фундаментальный вид инвариантности, проблема интерпретации понятий**

29 сентября 2022 г.

Тема текущей лекции

- Тема 1. Методология математики. История развития математики как фундаментальной и прикладной науки. Числа, слова и операции. Место математики в современной системе научных знаний. Основные принципы, теоремы и структуры.
- **Тема 2. Математика природы.** Технологии и средства вычислений. It from bit Физические носители информации, информационное взаимодействие. Киберфизика.
- Тема 3. Методология компьютерных наук. Вычислительные и информационные процессы. Алгоритмы, программы и вычислительные структуры. Теория информации и технологии кодирования
- Тема 4. Методы машинного обучения и технологии искусственного интеллекта . Алгоритмы или данные: from data-driven to knowledge-drive computing . Натуральные вычисления. Квантовая информация

Что было на прошлой лекции

- Суть методологии математических знаний – координатизация или пересчет.
- Из попыток выразить числом различные объекты возникли различные числа
- Суть компьютерных вычислений – получение результата за конечное число операций .
- Координатизация vs целостность: Поиск новых классов автоматов, реализующих «когнитивные» функции и моделирующих когнитивные решения – основная задача компьютерных наук 21 века

Редукция физической реальности к алгебраической системе

В принципе объекты природы являются носителями двойственных сущностей, а именно материи и информации.

Рассмотрим объект как некую алгебраическую систему с делением

A=A<a, X, Y, d, l) , где

X – вход, Y- выход, d – функция автоморфизма (отображение самого на себя -
d(a, x)=a, l – функция переходов между состояниями a, l (a, x) =y , a – состояния системы (включает переменные состояния и параметры).

- Физическая величина – > численное значение y, получаемое, при измерении Y.
- Оператор прогноза - > вероятность получить некоторое численное значение y при измерении

Вопрос. Какая аксиоматика может быть положена в основу A в рассматриваемых двух случаях ?

«Проблема Линды»

- Т.н. проблема Линды – ошибка коньюнкции или формальная ошибка, возникающая, когда предполагается, что коньюнкция конкретных условий более вероятна, чем одно общее условие:

Мыслительный эксперимент:

Какое из следующих событий произойдет с наибольшей вероятностью или они равновероятны?

1) завтра в Петербурге пойдет дождь

2) завтра в Петербурге пойдет дождь и студенты придут в университет

"Связка" - это предложение вида: "..X...and...Y..".

Например: "Сегодня суббота и светит солнце" это предложение является связкой.

Факт: Вероятность конъюнкции или вероятность того, что две вещи верны, никогда не может быть больше, чем вероятность того, что одна из них верна

Математика природы (1)

Еще древнегреческие философы пытались описать и объяснить порядок, который существует, предугадывая некоторые фундаментальные законы Природы.
Рассуждая о закономерностях природы Платон (около 427–347 до н. э.) писал о существовании неких универсалий, рассматривая универсали – как сущности состоящие из идеальных форм (др.-греч. εἶδος, *форма, in_forma_tion*), а реальные физические объекты — это не более чем несовершенные копии этих идеальных форм.

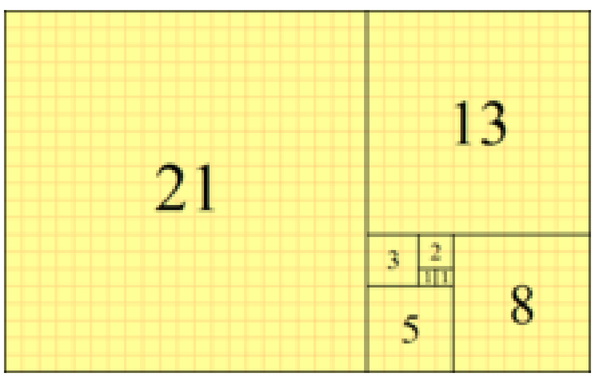
Реальный цветок может быть «примерно круглым», но это никогда не будет идеальным кругом.

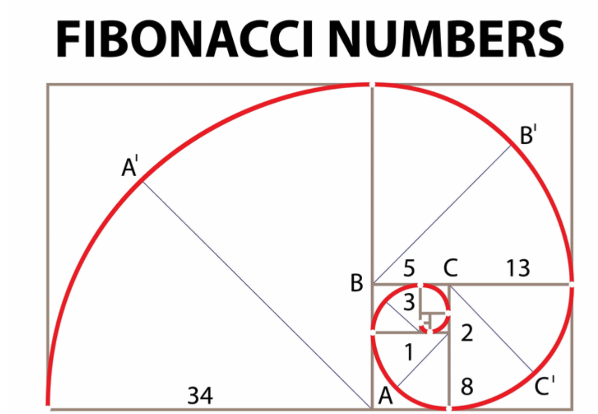
Пифагор рассматривал закономерности в природе, так же, как и гармонии в музыке, берущими начало из **числа, как первоначала всего сущего.**

Математика природы (2)

В 1202 году Леонардо Фибоначчи открыл **числовой последовательности**
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89…..

Фибоначчи привел (несуществующий) биологический пример численного роста теоретической популяции кроликов.

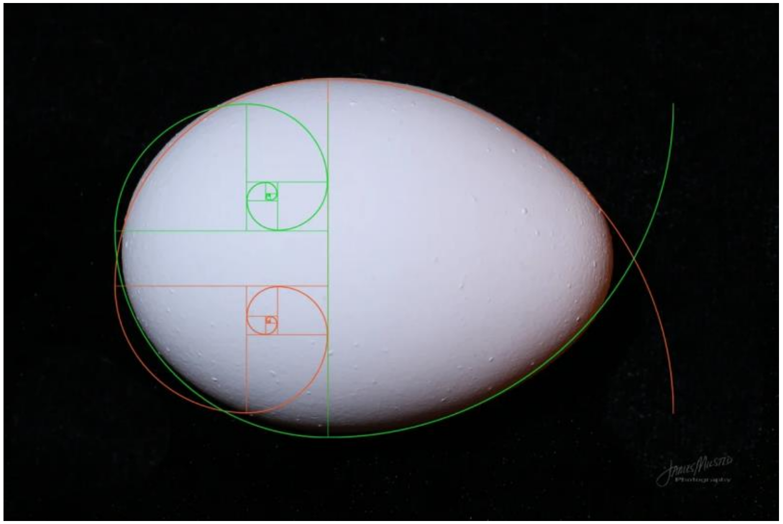


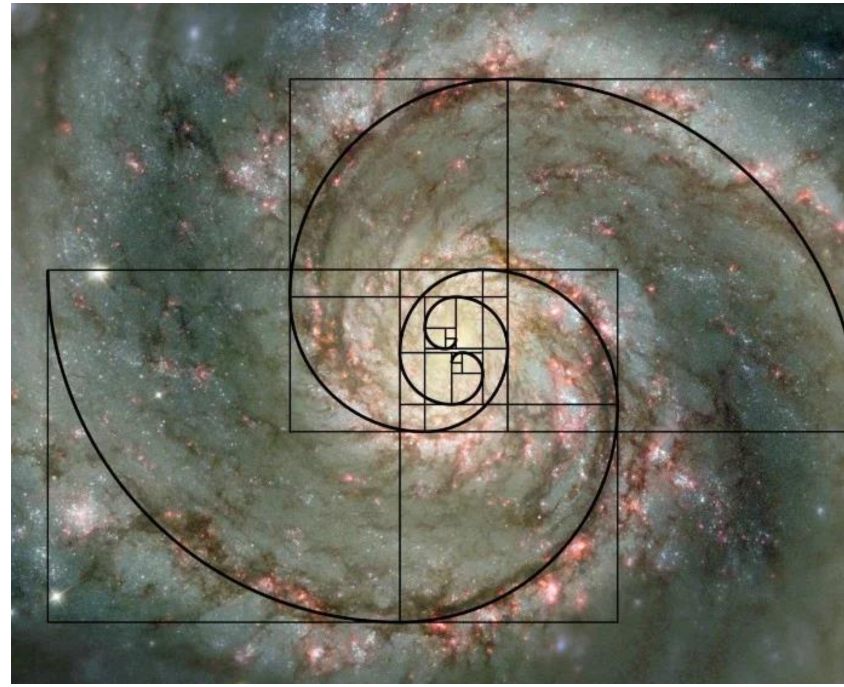


Представление чисел в виде квадратов, длина сторон которых есть ряд Фибоначчи

В 1917 году Томпсон (1860–1948) описание взаимосвязи расположения листьев на стебле растения и чисел Фибоначчи.

Математика природы (3)

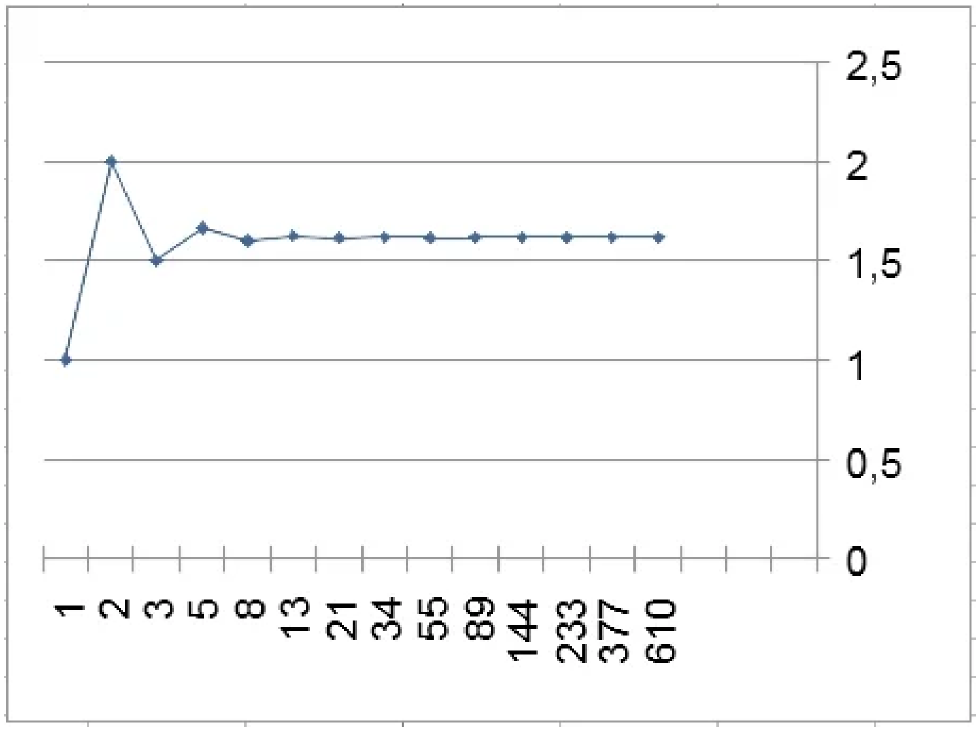




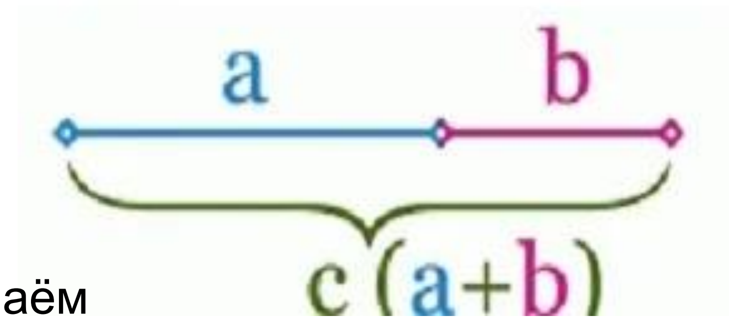
Ирис 3 лепестка Лютик 5 леп. Златоцвет 8 леп. Дельфиниум 13леп. Цикорий 21 леп.

Математика природы (3)

Результат деления двух соседних чисел в ряду Фибоначчи, большего на меньшее, стремится к значению 1,618:



знаменитое "золотое сечение", когда отрезок делится на такие части, при котором весь отрезок так относится к его большей части, как сама большая часть относится к меньшей:



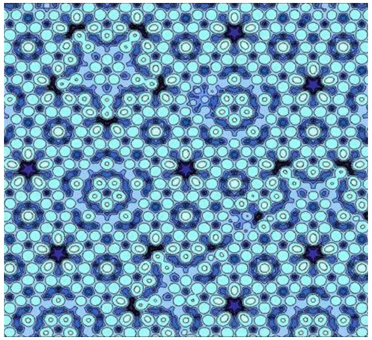
В отношении a / b = 1,618 узнаём знакомое число! Процентное соотношение отрезков при этом примерно 61,8 : 38,2

Математика природы

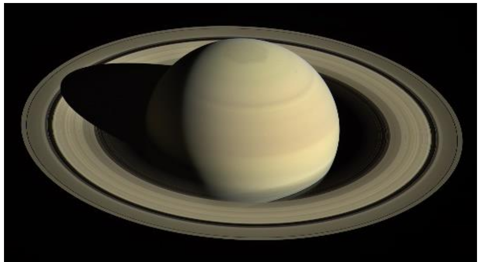
Красота, которую люди видят в Природе, имеет обоснование на разных уровнях, в частности в математике, которая описывает физическую форму закономерностей. В среде живых организмов, где правит естественный отбор, определяющий как будут развиваться закономерности.

Типы закономерностей

Симметрия. растения часто обладают радиальной или вращательной симметрией, как и большинство цветов, и некоторые животные
Среди неживой природы поразительной шестикратной симметрией обладают снежинки и квази кристаллы, которые обладалают осью симметрии пятого порядка, невозможной в трёхмерной периодической решётке.

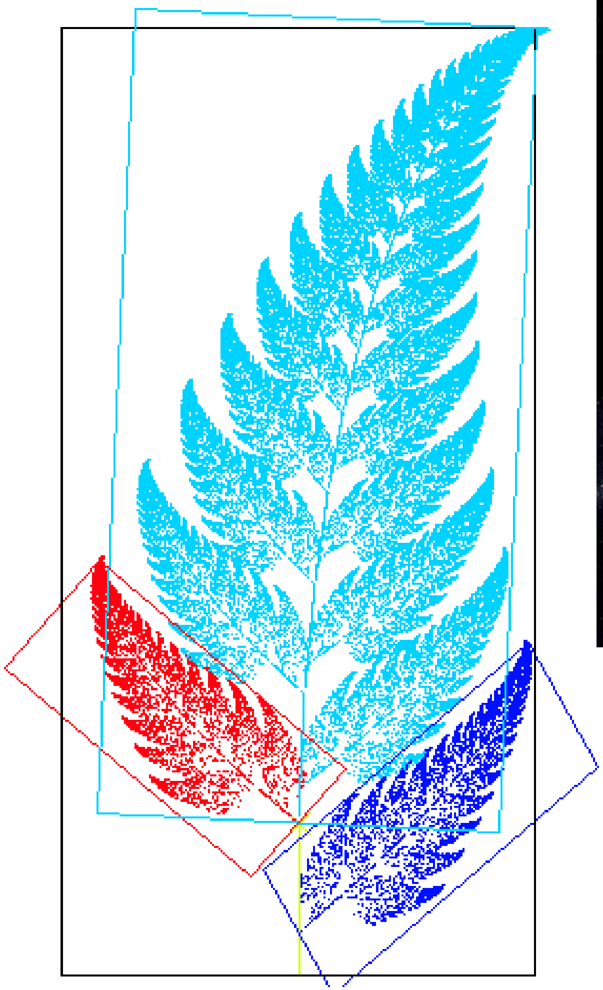


Итак, форма снежинки — это результат изменения внешних условий в процессе кристаллизации материала. Природа как бы «вычисляет» сама себя
Имеет место вращательная симметрия, которая встречается в неживой природе в различных масштабах, начиная следа от падающей на поверхность воды капли до сферических форм колец планетыСатурн



Типы закономерностей - самоподобная (фрактальная) структура

фракталы



Лист папоротника

картина распределения искровых каналов, образующихся на поверхности плексигласовой пластины

Фрактальные растения брокколи Романеско - естественные самоподобные формы

Типы закономерностей

Спирали.

У большинства моллюсков раковина является закрученной в спираль, при этом обороты спирали чаще всего находятся в разных плоскостях.

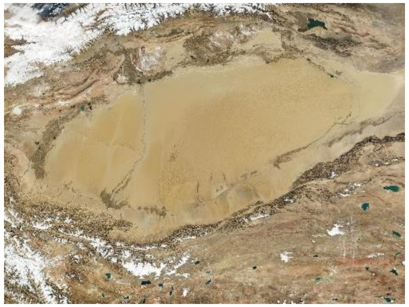
У большинства видов моллюсков закрученность спирали раковины бывает по движению часовой стрелки, если смотреть на раковину с заострённого конца; в более редких случаях закручивание раковины происходит против движения часовой стрелки.

Почему ?

Типы закономерностей

Хаос, поток, меандры, волны, дюны …. облака….трещины, мозаика

Считается, что динамическая система хаотична, если она высокочувствительна к начальным условиям, что связано с свойством топологического перемешивания и «странных аттракторов» орбит, которые имеют дробную (фрактальную) размерность



Процессы, создающие «порядок»: эмерджентность, эволюция, итерации

Эмерджентность – свойство системы свойств, не присущие её компонентам по отдельности… Существует три формы эмерджентных структур.

- первого порядка возникает в результате взаимодействия форм (например, водородные связи в молекулах воды приводят к поверхностному натяжению).
- второго порядка включает в себя взаимодействие форм, последовательно воспроизводимое во времени (например, изменение атмосферных условий, когда снежинка падает на землю и изменяет свою форму).
- третьего порядка является следствием формы, времени и наследуемых признаков. Так, генетический код организма влияет на форму систем организма в пространстве и времени.

- Эволюция - развития объектов природы, сопровождающийся изменением формы, функций, формирование адаптаций и новых наследуемых свойств.

В эволюционных процессах причинность приобретает форму итераций, а именно следствия также являются причинами, а эмерджентность является основной причиной эволюции эмерджентных явлений

Можно ли в физические процессы «встроить» процессы вычислений

- Так как Природа «управляется» объективными законами сохранения, которые есть следование тех или иных видов симметрии, то для встраивания вычислений в физические процессы надо определить тот вид симметрии, который это «встраивание» может поддержать.
- Возможный вид симметрии для встраивания вычислений в природные физические процессы - это симметрия обратимости состояний таких процессов.
- Одна из форм которой симметрии требует равноправности двух направлений «стрелы времени» между состоянием А и состоянием В. Эта ситуационная симметрия имеет вид равенства вероятностей $P(A)=P(B)$
- Наличие различных симметрий отделяет живую и не живую материю

Физические вычисления и эмерджентное разделение систем и образующих их компонент

Эмерджентное поведение физической системы — это качественное свойство, которое может иметь место только в том случае, когда число микроскопических составляющих системы стремится к бесконечности

В физическом мире нет «реальных» бесконечных количеств, поэтому не существует строгого разделения между свойствами отдельных составляющих системы и свойствами эмерджентного целого.

Например, для описания движения падающего яблока в терминах расположения его электронов возможно, но **расчет** траектории потребовал бы компьютер размером больше, чем размер Вселенной. В этом суть «сильного» эмерджентного разделения.

Примеры эмерджентности в физических системах:

- Законы классической механики возникают как предельный случай правил квантовой
- Силы трения возникают при рассмотрении более сложных, чем элементарные частицы, структур материи, которые могут преобразовывать механическую энергию в тепловую при трении друг о друга..
- Температура макроскопического поведения молекул

Такие механизмы могут быть использованы для получения математических формул эмерджентных реакций сложных систем.

«Движение» материи в форме процессов вычислений,

- Законы физики не описывают формулы материи в состоянии жизни, хотя и живая и неживая материи состоят из одних и тех же атомов. Определение жизни: "самоподдерживающаяся материальная система, способная к эволюции ….
- Феномен вычислений инициирует понижение энтропии (изменение информации) состояния системы без прямого силового воздействия.
- Живая материя наделяет атомы **эпифеноменом** (побочным явлением, сопутствующее другим явлениям) молекулярной эмерджентности – а именно, механизмом синергетической (информационно-генетической) репликации.
- Репликация при неограниченных ресурсах приводит к конкуренции на уровне «эгоистичных» генов, который «формирует» среду своего обитания и принуждает ее к своему копированию.

Невычислимость эмерджентных свойств больших систем

Для систем, состоящих из многих частиц ничто не может быть точно вычислено на уровне симметричных микроскопических свойств,

Так, для макроскопической системы, в которой симметрия присутствует в микроскопических уравнениях, симметрия отсутствует на макроскопическом уровне описания свойств. Почему: из-за фазовых переходов.

Итого, макроскопические системы обладают свойствами, не зависящими от многих микроскопических деталей. Это не означает, что микроскопические взаимодействия не имеют значения, но они просто становятся **не различимыми**
Вывод:

- не возможно вычислить макроскопические свойства, такие как нарушения симметрии, из свойств микроскопических уравнений.
- множество частиц ведёт себя совершенно иначе, чем её отдельные составляющие

Примеры эмерджентности

В некоторых интерпретациях квантовой механики восприятие детерминированной реальности, в которой все объекты имеют определенные координату, импульс и т. д., на самом деле является эмерджентным явлением, при этом истинное состояние материи описывается волновой функцией, которая не обязательно имеет одно положение или импульс.

Химию, в свою очередь, можно рассматривать как эмерджентное свойство законов физики.

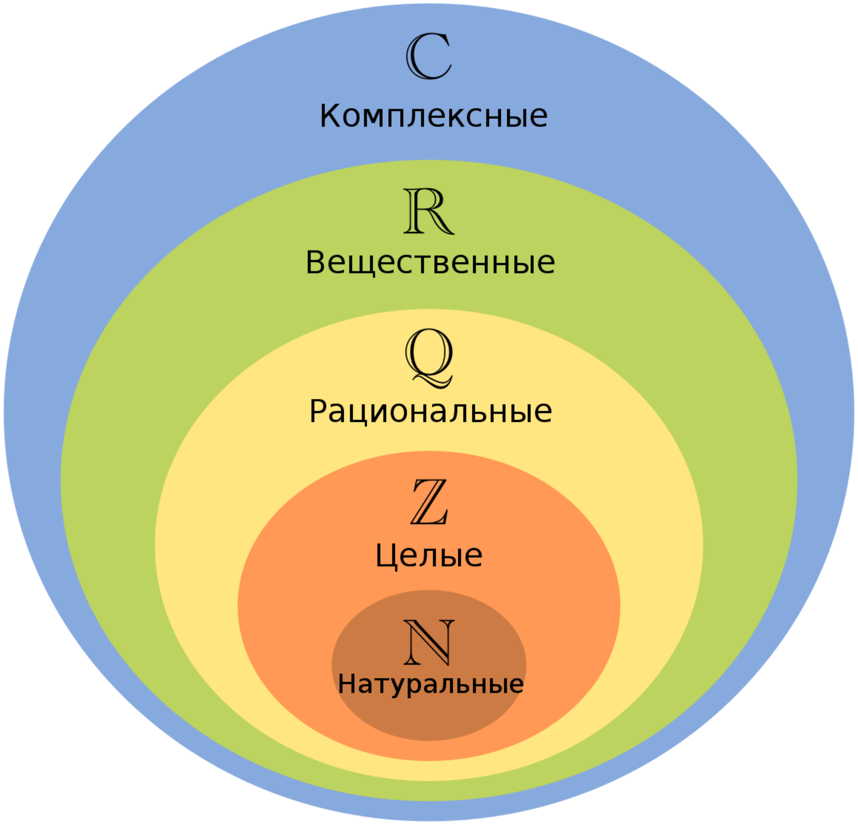
Биологию (включая теорию эволюции) можно рассматривать как эмерджентное свойство законов химии.

Психология может быть понята как эмерджентное свойство нейробиологических законов

Итого: всякий раз, когда имеется множество взаимодействующих индивидов, из беспорядка возникает паттерн, структура или изменения направления движения.

Число - что это такое и как это можно понять?

- Число с точки зрения для количественной характеристики, сравнения, нумерации объектов и их частей.



Представление чисел в памяти компьютера имеет ограничения, связанные с ограниченностью объёма памяти, выделяемого под числа.
Даже натуральные числа представляют собой математическую идеализацию, так как на объём памяти компьютера накладываются физические ограничения. В компьютере имеют дело не с числами в математическом смысле, а с некоторыми их представлениями, или приближениями.

- «Число» с точки зрения алгебраической системы – **элемент поля P, не обязательно числового.**

Что такое «полЕ» чисел и какое оно бывает

Поля бывают: футбольное поле, поле деятельности, поле экспериментов, электрическое, магнитное, электромагнитное, гравитационное поле Земли, поле действительных и комплексных чисел…

ПолЯ в математическом смысле - *скалярные* и *векторные*

скаляр – это величина, каждое значение которой может быть выражено **лишь одним числом**. Например: длина, ширина, площадь, объём, плотность, температура и др.
вектор - это структура, задаваемая большим **количеством** *чисел*(своими координатами) и направлением. Векторами характеризуют силовые физические поля, скорость и многие другие величины.

Скалярное поле: каждой точке некоторой области пространства поставлено в соответствие некоторое число. **Скалярное поле** *инвариантно* относительно системы координат.
Векторное поле: каждой точке некоторой области пространства поставлено в соответствие некоторый вектор с началом в этой точке.
Координаты вектора – это числа числа, но *скалярными величинами* они не являются, поскольку *скаляры* не зависят от системы координат. Координаты векторов можно задать и «обычными» функциями, которые не будут порождать скалярное поле!

Про «поле» чисел и алгебру операций

- Итак, элементы векторного поля **не свободны**, а «привязаны» к точкам пространства.
- Из «полЯ» можно индуцировать «алгебрУ». Поле действительных и поле комплексных числе являются единственными конечномерными ассоциативно-коммутативными алгебрами **без делителей нуля**.
- Поле (тело) кватернионов является единственной конечномерной ассоциативной, но не коммутативной алгеброй **без делителей нуля….**
  - Никаких других полей-носителей для числе не предусмотрено….
- Итак, поле комплексных чисел -комплексная плоскость – это «финал» расширения натурального ряда чисел.

PS

Делитель нуля: ‘это такое b, что ab=0 или ba=0.

Бесконечность и почему ее не считают числом ?

- Математика свободно оперирует бесконечными величинами: множествами, рядами, пространствами и т.д., математики до сих пор обходили стороной вопрос:
  - что есть и что считать за бесконечность,
  - как понимать бесконечность
  - какая бывает бесконечность.

Понимание бесконечности зависит от того, придаём ли мы ей некий конечный смысл.

Бесконечность может быть **потенциальной** и ее можно использовать для математических построений и может быть **актуальной** или состоявшейся. Такой бесконечностью можно оперировать как некоторыми реально существующими **целостными объектами**.

"Бог создал натуральные числа, а математики придумали всё остальное". Л. Кронекер

- Спор математиков о природе бесконечности поистине колоссален. Среди сторонников и той и той позиции, есть великие имена. Против существования актуальной бесконечности выступали основатель топологии А. Пуанкаре, основатель математического интуиционизма Л. Брауэр и знаток теории чисел Л. Кронекер
- Например, Гаусс считал, что *проще воспринимать π как потенциальную бесконечность.*
- Г. Кантор ввел понятие ординальных (трансфинитных) чисел, таких, что больше самой бесконечности....
- Далее "мощность множества" называется в математике "кардинальным числом". Например, 31 - это кардинальное число множества дней в декабре, а 5 - кардинальное число пальцев на руке и т.д.

Уточнения

- У каждого линейно упорядоченного множества помимо мощности есть и другая характеристика - порядковый тип - некий "размер" множества, ограничивающий его сверху.
  - Например, для множества {0,1,2,3...99} порядковым типом будет ординал 100.
- Кардинал 77 - это привычное нам число 77 (семьдесят семь);
- Ординал 77 - это упорядоченное множество {0,1,2...76} (семьдесят седьмой).
- Как только мы переносимся в бесконечность, становится важно различать размеры (кардиналы) и позиции (ординалы) чисел.

Исчислимые сущности

Под исчислимыми будем понимать измеримые объекты реальности, обладающие свойствами быть:

1) делимыми; 2) однородными (сохранение свойств при делении).

- Базовой математической операцией является сложение
  - (вычитание, умножение, деление, возведение в степень, логарифмирование, интегрирование и дифференцирование и т.п. можно индуцировать из сложения - их свойства определяются свойствами операции сложения и следующими аксиомами:
- a+b=b+a; (симметрия), (a+b)+c=a+(b+c); (ассоциация), (a+0)=a; (наличие нуля), a*1=a (наличие единицы)

Натуральное «число» как причина и результат

Эвклид: «Единица есть то, в соответствии с чем каждая из существующих вещей называется одной. Число есть множество, сложенное из единиц».

натуральные числа это :

- числа, используемые при перечислении (нумерации) предметов: 1, 2, 3, … (первый, второй, третий и т. д.).
- числа, используемые при обозначении количества предметов: 0, 1, 2, … (нет предметов, один предмет, два предмета и т. д.).

Итак, основные функции натурального числа:

· характеристика количества предметов;

· характеристика порядка предметов, размещенных в ряд.

Стандарт числа с «плавающей» точкой стандарт IEEE754

В компьютерах используются специальные числа. Главные достоинства чисел с плавающей точкой заключаются в том, что они позволяют производить вычисления в большом диапазоне значений на вычислительном устройстве.

Стандарт IEEE 754 является причиной того, **что расчеты, сделанные с использованием этого формата, могут приводить к совершенно непредвиденным результа**там. Правила округления двоичного представления чисел, заложенные в стандарте IEEE754, в результате **обратной конвертации чисел из двоичного кода**, в десятичный код дают отшбку.

Пример: рассмотрим сумму двух действительных чисел, представленных в формате float, каждое из которых имеет по 7 верных значащих цифр:

0,6000006 + 0,03339874=0,6333993 4≈0,6333993

Имеем

0.6000006 ≈ 1.00110011001100110100 1*2^(-1)

0.03339874≈1.00010001100110100011110*2^(-5)

0.6000006 ≈ 0.6000006 198883056640625≈0.6000006 2

0.03339874≈0.03339873 9993572235107421875≈0.0333987 4

Сумма чисел в двоичном 24-х разрядном виде даст следующий результат:

1.00110011001100110100 1*2^(-1) + 1.00010001100110100011110*2^(-5)≈

1.01000100010011001110 11*2^(-1) ≈0,6333994

Выводы

- Неправильно считать, что вычисления, проведенные на «бумаге» и с помощью цифровых процессоров дают одинаковый результат
- Неправильно считать, что результат компьютерных вычислений не зависит от компилятора программного кода (IEEE-854, ранее IEEE 754)
- К целым числам применим термин не точность, а "разрядность»
- Преобразования систем счисления двоичная ⇄ десятичная приводит к тому, что количество двоичных разрядов в машинном представлении целого числа будет больше количества десятичных разрядов в его видимом (печатном) представлении.
- операции с числами с фиксированной запятой не предусматривают выполнения округления результата. "Излишне точные цифры числа" справа, в дробной части, просто отбрасываются
- число с плавающей запятой является машинным представлением действительного числа записанного в экспоненциальной форме. представление числа 1/6 имеет погрешность уже в 7 цифре дробной части для одинарной точности и в 16 цифре для двойной точности……результат вычислений зависит от разрядности представления чисел