



**История и методология математики и
компьютерных наук**

Лекция 2_1 (продолжение)

**Тема 1. История развития
математики как
фундаментальной и прикладной
науки**

Санкт-Петербургский
Государственный
Политехнический
Университет

Институт прикладной
математики и механики

22 сентября 2021 г.

Что было на прошлой лекции

Установили, что применение математических методов для описания процессов Природы основано на решении «прямой интеллектуальной задачи» - отождествлении **объектов/явлений** (феномен) и умо-постигаемых сущностей (ноумен).

В 21 веке гипотеза **математической реальности** Платона находит воплощение в компьютерных технологиях , а именно, в воплощении математических сущностей в реальные физические **объекты**, например, в современные машины и механизмы.

Итак, поняв «механизм» того или иного **явления (физика)** и представив явление через **нарратив (описание)** - множество **семантически взаимосвязанных сущностей — последовательности слов-понятий**, люди могут аналогичный механизм реализовать с помощью различных **объектов** , точно так же, как они способны выращивать урожай в **поле (физическом)** с помощью реализованного метода воспроизводства растений.

Вопрос на который ищем ответ: можно ли «вырастить» математические структуры, которые были бы «вычислимы» на компьютере и какое для этого нужно **«поле»** (**математическое**)

Для информации

семинар Ассоциации «Искусственный интеллект в промышленности».

Тема семинара: «Оптимизация численных методов с помощью методов машинного обучения в серийных вычислениях».

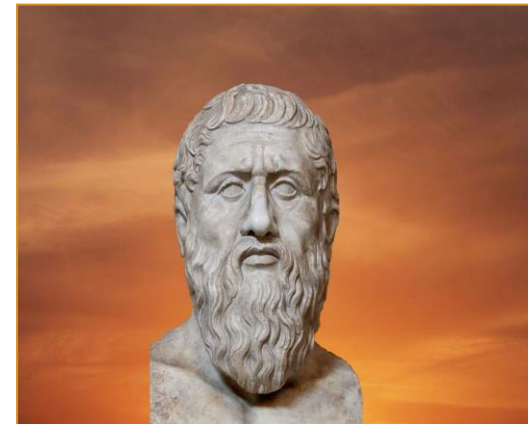
Докладчик. Гориховский Вячеслав Игоревич, инженер-исследователь кафедры гидроаэромеханики СПбГУ.

- Дата и время: 22 сентября 2022, 17:00
- Формат: лекция и дискуссия в Zoom
- Ссылка для подключения: <https://us02web.zoom.us/j/81411729558?pwd=QUpkY0cxY2kzS3lLUXZKN2w1cTMrQT09>

Наивная методология Платона: мир идей и вещей

Суть подхода:

- Существует совершенная **идея**, не рожденная и не гибнущая (вечная)... но ее **«измерить»** невозможно
- В материальном мире есть **нечто** подобное **идее**. а именно то, что называется **ощутимое** ...это **«нечто»** имеет числовую меру.... Число искажает идею - материальный мир несовершенен, измерим, поэтому конечен.

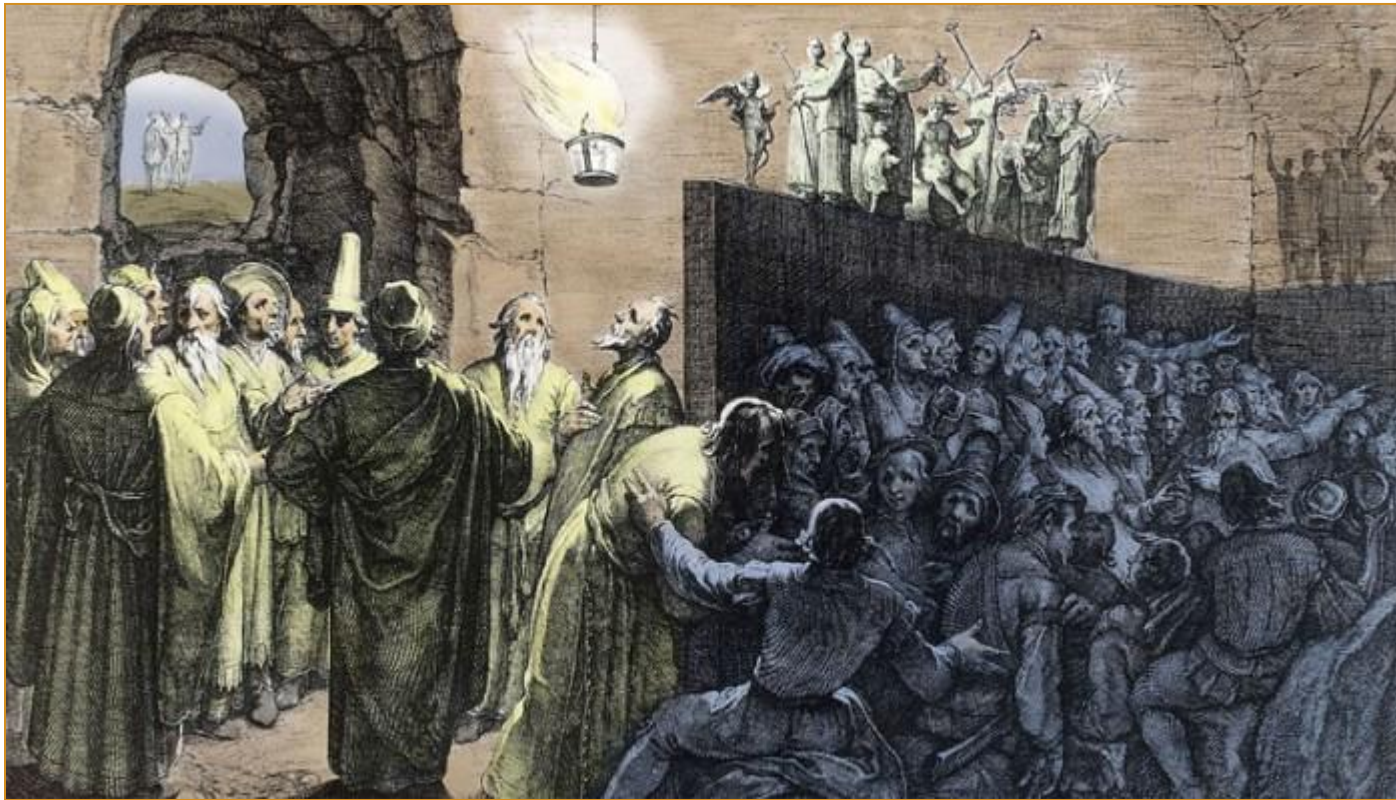


Методология:

- **Идея** «воплощенная» в материю порождает количественно измеримый объект-тело
- **Тело** полностью находится в материальном мире, поэтому оно «страдает» от несовершенств и умирает.
- **Мир** состоит из противоположностей: наличие одной противоположности подразумевает существование второй. Раз есть **сон**, то есть и **бодрствование**, раз есть **смерть**, то есть и **бессмертие**.


Наивное доказательство **бесконечного существования ... души-идеи**: «Если бы все, причастное жизни, умирало, а умерев, оставалось бы мертвым и вновь не оживало, то в конце концов все стало бы мертво и жизнь бы исчезла». Живое существует...значит «душа» бессмертна (т.е. бесконечна и количественно не выразима)

Метафора - «Пещера» Платона



Пещера Платона и ее жители: 1) «простой народ» - воплощение несовершенства, т.к. проводит жизнь в невежестве. 2) есть «философы» способные **понять**, что есть **истина** и **объяснить** народу «**математику природы**»
Фундаментальный вопрос науки: как выражается суть «идей»: числом или ... словом Это зависит от самой «идеи» и того, кто слушает «ответ»

Методология «Критика чистого разума» И. Канта

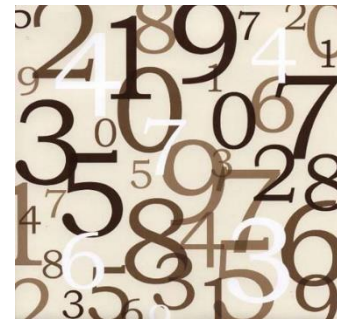
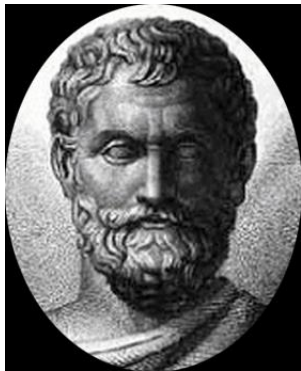
- Умение ставить (где, как, на каком языке) разумные вопросы есть важный и необходимый признак ума – **атрибута сознания**.
- Чистые априорные сущности реальности – **пространство, время, движение, отражение/познание**
- Никакое познание не предшествует во **времени** опыту, оно всегда начинается с **опыта**.
- **Физические явления** познаваемые сущности, которые мы принимаем за предметы наших **чувств/ощущений**
- Основной вопрос науки состоит в том, насколько реальность может быть **познана** разумом независимо от опыта и на каком механизме основана сама способность познания/**мышления**

Исчислимые сущности Природы и методологические основания математики

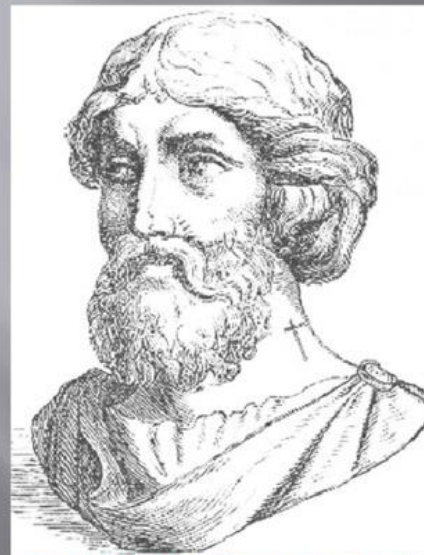
Число можно определить как элемент **некоторого математического «поля»**, которое, однако, не обязательно должно быть числовым....

- Введение в абстрактном поле **числовой меры** (например, вероятности) для различных сущностей позволяет рассматривать **математику как экспериментальную науку** исследования сущностей. От сущностей требуется одно - быть **исчислимыми**, т.е. измеримыми, а также
- 1) **делимыми**; 2) **однородными** (сохранение свойств при делении).
- Базовой математической операцией является **сложение**. **Другие операции** - вычитание, умножение, деление, возведение в степень, логарифмирование, интегрирование и дифференцирование и т.п. можно индуцировать из **сложения в соответствии со** следующими аксиомами:
- $a+b=b+a$; (симметрия), $(a+b)+c=a+(b+c)$; (ассоциация), $(a+0)=a$; (наличие **нуля**), $a*1=a$ (наличие **единицы**)

- Предмет математики (отвечает на вопрос «как») – измеримая **структура** объектов Природы, которая существует либо: а) как состоявшаяся **данность, либо как** б) потенциальная **возможность**.
- Фалес Митетский (625-545 г д.н. э) : Через **логику субъекта** (мышление) для познания становится доступна **математика Природы**.



Нумерология Пифагора : все есть число



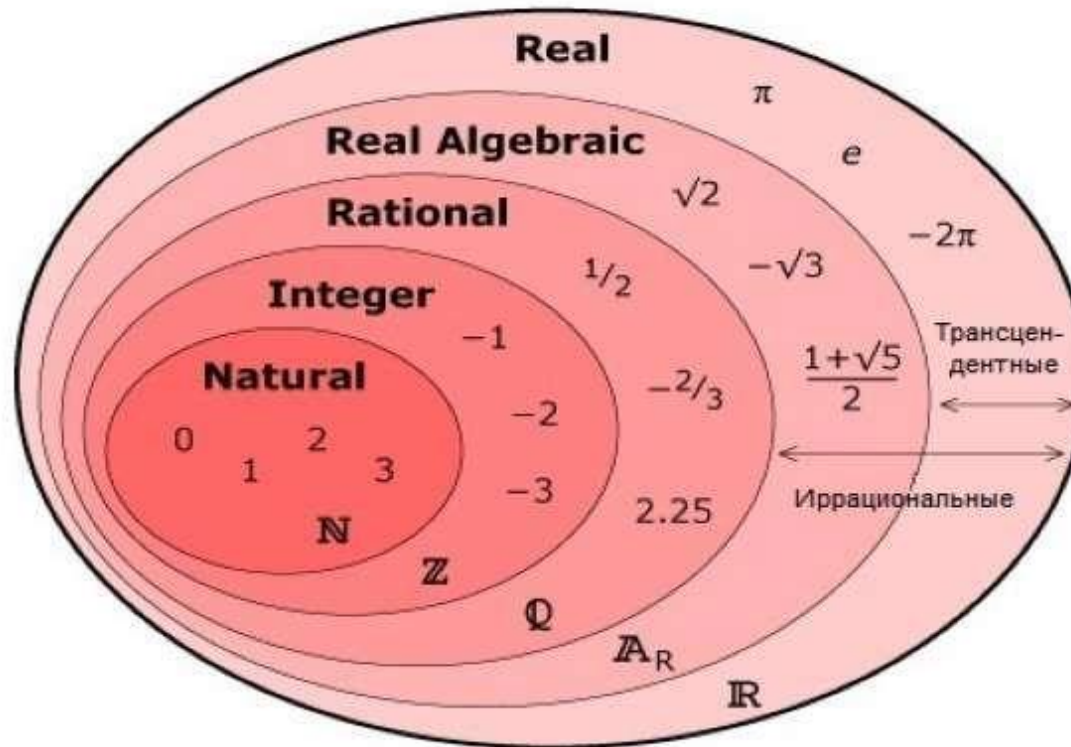
Пифагор Самосский
570—490 гг. до н. э.

«Всё
есть
число
»

Пифагор обнаружил, что в основе музыки (физического процесса) лежат свойства, которые выражаются через числа.

Пифагор считал, что $1+2+3+4 = 10$ обозначает «число, которое отражает весь мира» , мир прекрасен благодаря этому числу!!!

Число – символ «чистой идеи», а количество – это мера отражения числом какой либо природной сущности .



Real figures - Вещественные числа = Действительные числа

Real Algebraic figures - Вещественные алгебраические числа

- алгебраические - корни многочленов с целочисленными коэффициентами

- трансцендентные - не корни многочленов с целочисленными коэффициентами

Rational figures - Рациональные числа

- рациональные - представимы в виде обыкновенных дробей

- иррациональные - непредставимы в виде обыкновенных дробей

Integer figures - Целые числа

Natural figures - Натуральные числа

Основа математики – координатизация уже состоявшейся реальности (которая не относится к «миру идей»)

- Восприятие мира имеет форму
 - Ощущения (не познанная сущность), возможности описания предмета через понятия и интуицию, которые возникают «здесь и сейчас» - пространстве/времени
 - Измерения (координатизация, теория информации Хартли-Шеннона, термодинамика), которые превращают явления в метрические символы – числа, которые «вечны», т.е. способны сохраняться неограниченно долго, передаваться другим лицам, получать новую информацию (возможность) о предметах. бывших объектом измерения...
 - Где и сколько имеется «информации» ?
 - Как из информации образуются «знания» ?

Методологические аспекты математики как экспериментальной науки

- Аспект 1. Описание объектов основано на возможности отражения явлений в числовое поле и сопоставления объекту числовой меры или информационного содержания (количества «бит»).
- Аспект 2. Информационное содержание - мера, которая характеризует потенциально возможное разнообразие описание макроскопического объекта или то, что может произойти с объектом в принципе
 - $1+2=3$
 - $1+1+1=3$
 - $10-7=3$
- Аспект 3. Потенциально возможное или «информационное содержание» физической реальности, разделяется на
 - макро и (ощущаемое)
 - микро (измеряемое)

описание. В математическом «поле» эти описания могут совпадать. В поле физических процессов – макро описание это термодинамика, микро описание – это молекулярная динамика

Абстракция отождествления или эволюция «числа» к информационному описанию объекта

- Абстракция отождествления. принимать во внимание лишь те их различия, которые в данной ситуации по тем или иным причинам оказываются существенными (для целей и/или задач), игнорируя другие — несущественные. Так, объекты, которые различаются несущественным образом, считаются одинаковым... **рациональные и вещественные числа**
- Образ – это особая абстракция - картёж (упорядоченное множество) данных того, что субъект знает об объекте (автомобиль)
- Как реагировать на картеж «объект-событие–ситуация», например, в поле зрения человека появился автомобиль», реакция – или действие это результат работы **мышления** .
- Суть мышления - способность выполнять различные операции не с числами, а с «образами» объектов реальности проводя **«КОГНИТИВНЫЕ» ВЫЧИСЛЕНИЯ**

Методология и принцип математической целостности

Натурализм – методологический принцип выведения всего происходящего из фактов, которые непосредственно наблюдаются в природе.

«Все, что существует, имеет определенное свойство А» . Свойству можно сопоставить количественную меру. Эта мера может быть использована для измерения А.

Принципа «целостности» (фактической обособленности от остального мира и внутреннее единство) : объекты реальности обладают свойствами, часть из которых не могут быть выведены непосредственно из характеристик их составных частей. Феномен **эмерджентности**

«Объект» + «событие» = «ситуация»... когнитивные вычисления основаны на «алгебре ситуаций» .

Можно ли такую алгебру построить ? Что в этой алгебре будут операциями ?



Аддитивность принципа «целостности»: аспекты эмерджентности и ингерентности

Эмерджентность - существуют качества, присущие только системе в целом, но не присущие ни одной из ее составных частей, т.е.

При изъятии части системы меняются :

как сама СИСТЕМА (состав - структура - свойства)

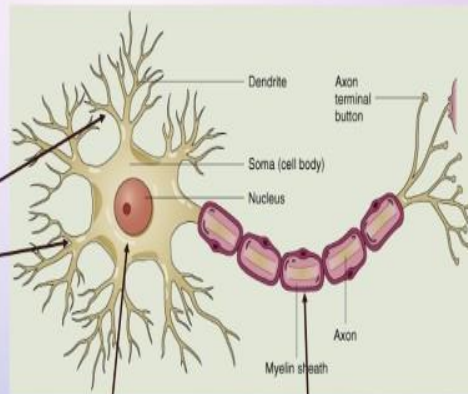
так и ее ЧАСТИ (среда - стимулы - функции)

Если из системы в результате измерения «изымается» информация, что с этой системой происходит (формализм квантовой механики, принцип дополнительности)

Ингерентность - Способность системы выполнять заданную функцию в определенной окружающей среде.

Компьютерные науки – как «аутсорсинг» когнитивных функций

Строение нейрона



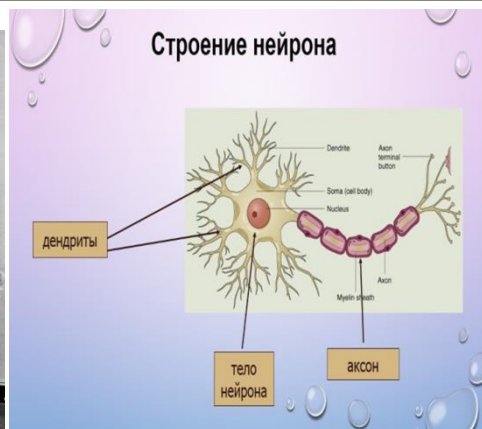
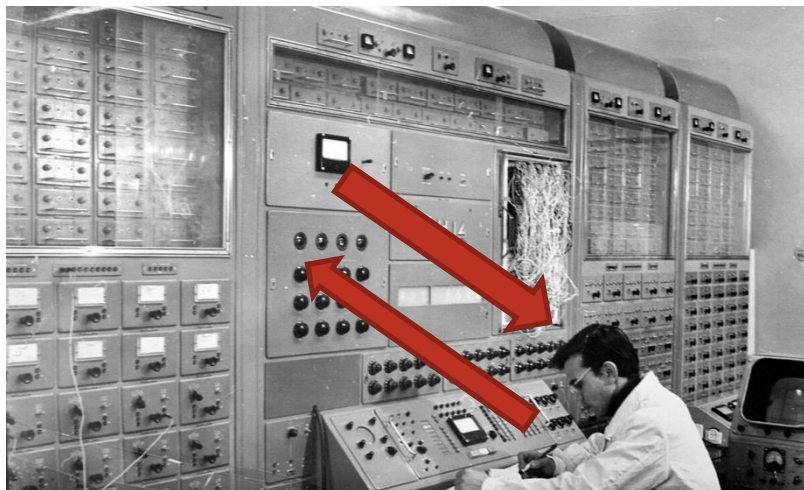
дендриты

тело
нейрона

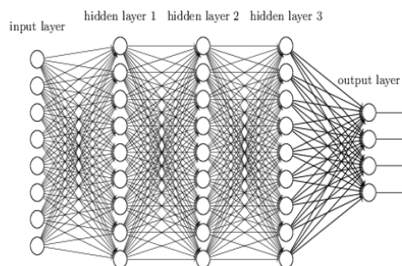
аксон



Алгоритмические vs когнитивные функции



процессы «вычислений» в головном мозгу – образуют «целостное» несущее множество образов – символов или кодов



$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla \psi &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right]\end{aligned}$$

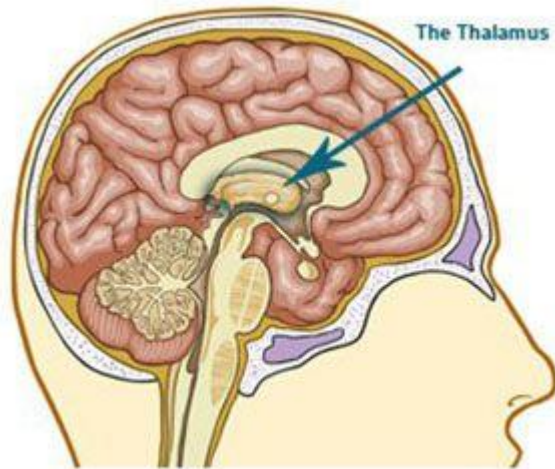
В чем **фундаментальная** разница между физическими (носители вещественные) и когнитивными (счетные) процессами? (теорема. Левингейма-Сколема¹⁷)



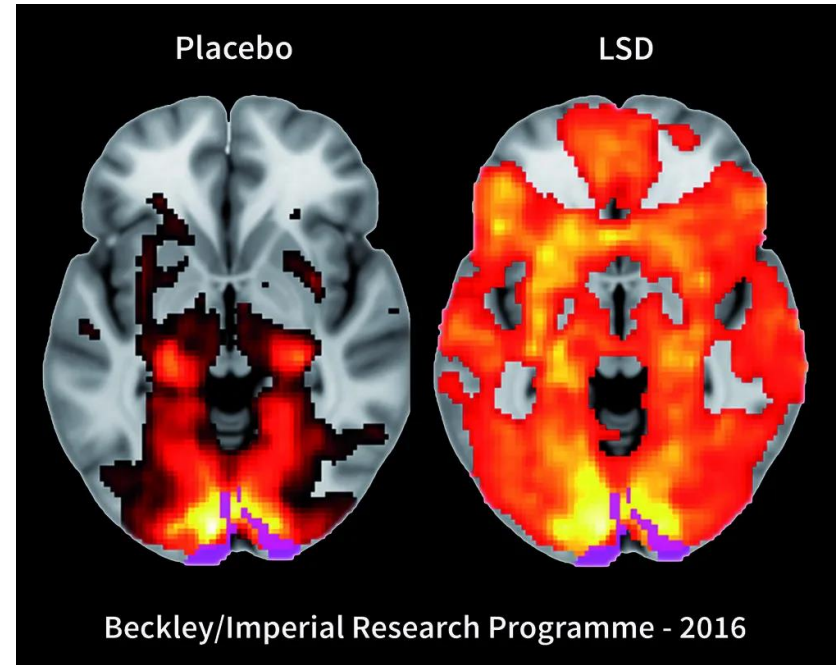
от «чисел» к образам, объясняющим свойства реальности

Роль «интеллектуальных фильтров» – феномен внимания

18



Основной функцией таламуса является прием сигналов от органов чувств, которые проходят будто по прямой полоске. В **таламусе** сигналы первично обрабатываются, после чего они переправляются в необходимую область коры головного мозга.

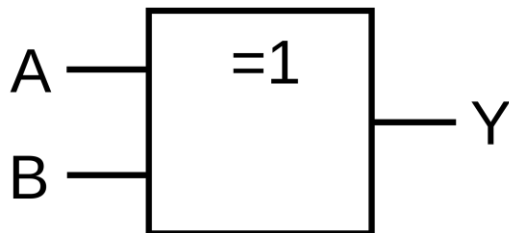


В кору попадает только незначительная часть всех сигналов, которые вырабатывают органы чувств и сенсоры тела человека

Термодинамика символов в процессе вычислений

19

В алгебре Буля, на которой построены современные вычислительные системы, сопоставляется макросостояния логического гейта с микросостоянием электронной схемы



В соответствии с принципами термодинамики вероятность макросостояния "1", которое строится из малого числа микросостояний (электроны в микросхеме) меньше, чем у тех макросостояний, которые состоят из большого числа микросостояний. Очевидно, что $P(\text{состояний} = 2) < P(\text{состояний} = 100)$.

Измерения выхода или макросостояния Y процесс снижения энтропии. Полученную информацию в компьютере почти сразу можно использовать, а затем забыть. В результате потери информации по формуле Ландауэра выделяется как минимум $kT \ln 2$ Дж тепла.

Но с тем, что называется ощущения это не так. Энтропии снижается, но... без затрат энергии. Но ощутить и понять можно лишь то, что было испытано раньше.

Если бы люди знали ВСЕ микросостояние всего Мира, то могли бы получать знания и не терять информацию, т.е. не рассеивать тепло.

Когнитивные вычисления

-
- Идея "аутсорсинга" функций биологического организмом за пределы его физического тела и использования в "своих" целях любых элементов окружающей среды, на которые организм может влиять или контролировать, суть **экзо концепции**.
- Экзо-система (внешняя по отношению к человеку) может быть неживой или живой. Один организм может использовать другой организм при прямом контакте или ... манипулируя поведением другого организма (микробы патогены с очевидной выгодой для себя используют ресурсы другого организма для размножения....).
- В рамках этой концепции получается, что современные компьютеры—есть нечто, что **расширяет фенотип человека**. В итоге человек имеет возможность "заставлять" неживые системы (компьютеры) **выполнять вычисления** от своего имени и тратить энергию от его имени.

Заключение

- Суть методологии математических знаний – координатизация или пересчет.
- Из попыток выразить числом различные объекты возникли различные числа
- Суть компьютерных вычислений – получение результата за конечное число операций .
- Координатизация vs целостность: Поиск новых классов автоматов, реализующих «когнитивные» функции и моделирующих когнитивные решения – основная задача компьютерных наук 21 века