Весьма вероятно наступление невероятного

Агафон
папа римский,
с 678 по 681 гг. н.э.

невозможность сформулировать базовое определение свидетельствует о непонимании *сути* предмета

Теория информации

ЛЕКЦИЯ 6: ОПИСАНИЕ ОБЪЕКТОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ВОЗМОЖНЫХ СОСТОЯНИЙ

7.10.2021

д/з: как назвать и что понимается этими терминами

- Как можно было бы назвать лекцию № 5 ?
- Примеры на слово
  - «Интенсионал» (содержание понятия)
  - Экстенционал (объем понятия)

Что обсуждали на прошлой лекции

- Способность описывать что-либо, даже достаточно точно, совсем не равноценна пониманию этого «что-либо».
- Знать формулу физического закона не значит понимать описываемые с ее помощью явления.
- Пониманию можно сопоставить меру «снятой неопределенности», которая характеризует «количество информации»
- Чем «глубже» понимание явления, тем к более отдаленным от непосредственного опыта сущностям это понимание обращается

Тематика лекции 6 и двух последующих

- **Вероятность**
- Информация
- Статистика

Вопросы на которые мы ищем ответы

… потому что все оттенки смысла
умное число передает.

Н. Гумилев
(стихотворение «Слово»,
1919 г. Петроград)

- откуда в нашем мире берётся вероятность
- в чем разница между понятиями «вероятность» и «случайность»

Теория вероятности имеет дело не с реальными объектами, а с их моделями.

Чтобы ввести понятие «вероятности» надо построить модель явления, которому можно сопоставить «умное» число характеризующее как одно случайное событие…., так и различные варианты сочетания событий.

случайность vs закономерность !?

0<p<1 : случайность
P=0 – невозможное событие
P=1 – достоверное событие

Случайные события «дискретны» и просты –

Процесс со случайными (не рациональными) взаимодействием непредсказуемы

Отношение между незнанием и вероятностью

Ключевое положение: От того, что вы чего-то не знаете, не значит, что это что-то случайное.

- Так, если вы не знаете решение уравнения — это не значит, что его решением с одинаковой вероятностью может быть любое число.
- Вероятность, например, можно определить как степень субъективной уверенности в истинности суждения, опираясь на теорему Байеса (1702-1761).
- Вероятность можно связать с частотой повторения события в длинной серии наблюдений
- Незнанию можно сопоставить уверенность и использовать принцип максимума энтропии, который утверждает, что наиболее достоверным распределениями вероятностей состояний неопределенной среды с уверенностью можно выбрать такое распределения, которые максимизируют выбранную меру неопределенности при заданной информации о «поведении» среды.

Вероятность - количественная мера «пространства возможностей».

- Понятия, используемые для описания структуры реальности, определяют и границы, которые отделяют мир «состоявшихся явлений» от мира «потенциально возможных событий».
- С этой точки зрения любой физический эксперимент – это редукция «потенциально возможного» к «состоявшемуся». Количественная характеристика процесса редукции – суть вероятность. Поэтому, представление о наличии единственного исхода любого эксперимента не является основой научного понимания реальности:

$$A \vee \overline{A} = 1 \qquad \text{VS} \qquad P(A|B) = \frac{P(B|A) * P(A)}{P(B)}$$

Информация как мера пространства возможностей событий vs характеристика объяснения событий.

Суть «vs» в том:

- как отличить «понимание» сути событий от простого знания о состоявшемся событии?

Это аналогично тому, чем ответ на вопрос «почему» отличается от ответа на вопрос «что» или из-за чего законы естественных наук отличаются от эмпирических правил («красная рябина» – к морозной зиме) ?

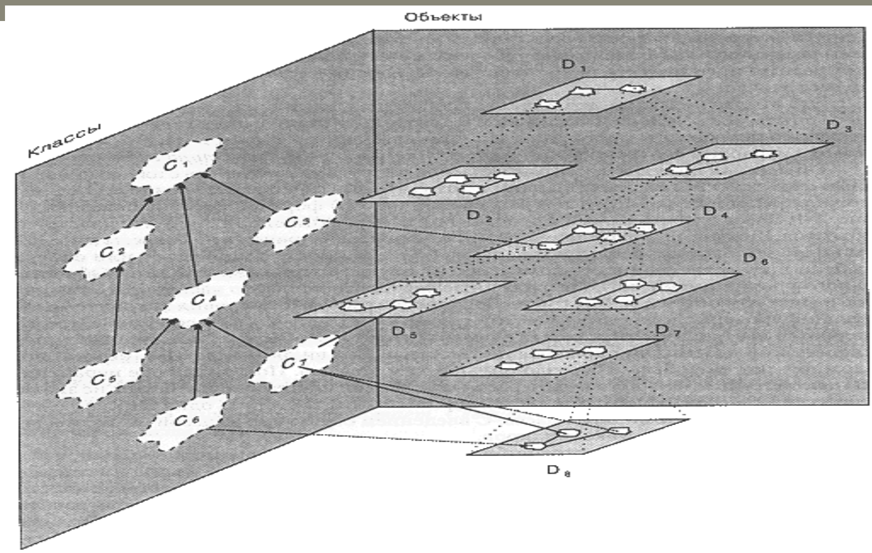
Суть «глубоких» объяснений состоит в том, что они охватывают не только состоявшиеся события, но и потенциально возможные…

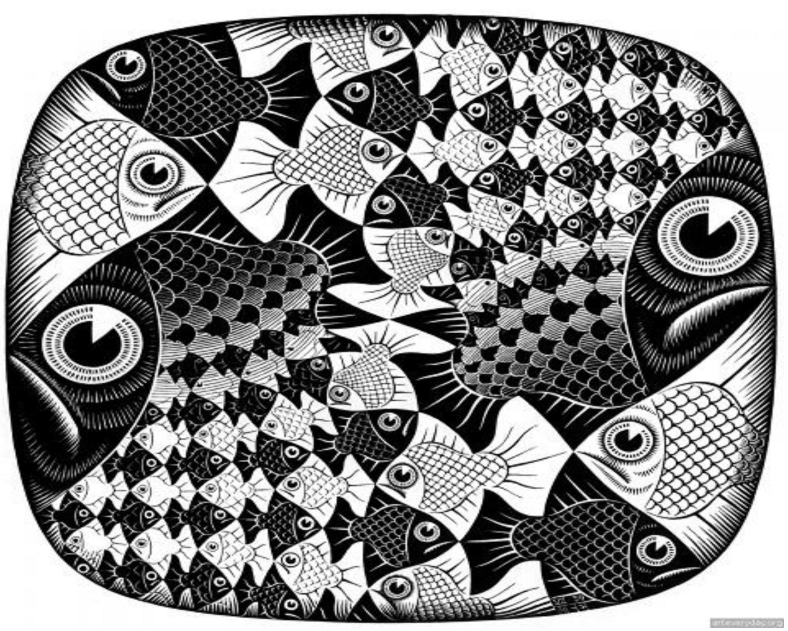
Где же храниться и как появляется информация о то, что «потенциально возможно» ?

Научный редукционизм

- Суть научного редукционизма – сведение процесса к его причине. Итак, чтобы «вычислить» решение, которое описывает фактическую траекторию движения некоего объекта в момент $t = t_0 + t_1$, необходимо помимо законов Ньютона знать дополнительную информацию, а именно, начальные состояния $x(t_0)$.
- Но… кроме этого нужна также информация, которая позволяет объяснить существования **самого начального состояния**: почему в действительности это начальное состояние возможно ……

Язык описания: иерархия классов или суперпозиция состоя

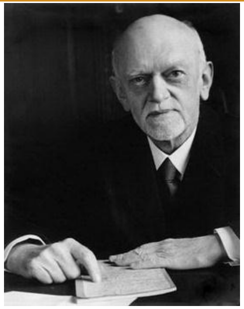




Описания объектов в «пространстве возможностей» позволяет характеризовать разные аспекты проявления свойств реальности.

Использование информационного аспекта позволяет дополнить сигнатуры **языка описания физической реальности**, который используется для формулировки объяснений наблюдаемых явлений, такими понятиями как мера разнообразия/неопределенности, которая не непосредственно не сводится (редуцируется) к физическим проявлениям свойств материи

6-ая проблема Гильберта (сформулирована в 1900 г.)



- Суть проблемы - аксиоматизации теоретической физики, которая сводится к решению двух вопросов.
  - Аксиоматизацию теории вероятностей - фундамента статистической физики.
  - Разработка теории предельных процессов «которые ведут от атомистической модели к законам движения континуума».

Что сделано настоящему времени

- В 1933 году Колмогоров на базе теории меры построил аксиоматику теории вероятностей, которая сегодня является общепринятой.
- Общими аксиоматически построенными физическими теориями являются общая теория относительности (1915-1916 гг.), которая описывает гравитационное взаимодействие и квантовая механика, в которой **действие** ($S = \hbar\varphi$ фаза волновой функции или p*v) сравнимо по величине с постоянной Планка (уравнение Шредингера, уравнение фон Неймана, уравнение Гейзенберга и уравнение Паули).

Аксиоматика по Колмогорову

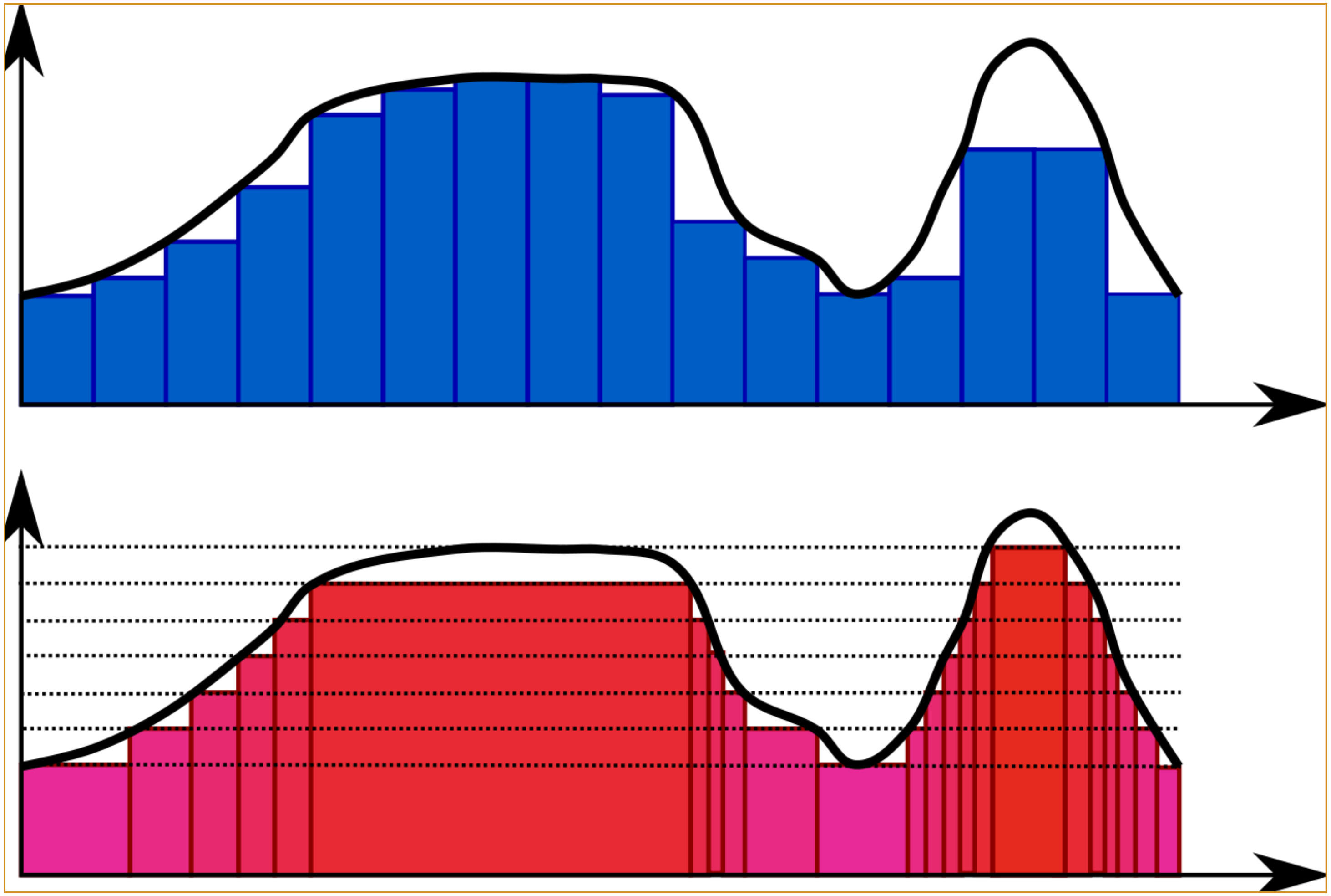
А. Н. Колмогоров используя идеи Э. Бореля о связи понятий вероятности и меры, формализм теории множеств и интегрирования функций по Лебегу, сформулировал простую систему аксиом (вообще говоря, не являющуюся единственной), позволившую описать существовавшие к тому времени классические разделы теории вероятностей.

В основе теории аксиоматизация понятия «случайного события» и «его вероятности». Откуда «берутся» события не обсуждается…, но очевидно, что на вопрос «откуда» можно ответить из «**пространства возможного**» - некоего измеримого множества .

Пусть Ω — множество элементов w, которые называются элементарными

(альтернативными) событиями, A множество подмножеств Ω, называемых случайными событиями (или просто — событиями)

Напоминание: Интегрирование по Риману (вверху) и по Лебегу (внизу)- в чем разница ?



Аксиомы теории Колмогорова

- Аксиома 1. А – является **алгеброй событий**
- Аксиома 2. Каждому событию x из А сопоставляется неотрицательное вещественное число P (x) – **мера**, которая называется вероятность,
- Аксиома 3. P(Ω)=1 - **нормировка пространства**
- Аксиома 4. Если подмножества А, соответствующие **независимым событиям** x и y не пересекаются, то P(x+y)=P(x) + P(y)

Совокупность { Ω, A, P } – это вероятностное пространство (у Комогорова – поле вероятностей)

Почему же это «алгебра» событий ? Потому, что на множестве А заданы операции «сложения» и «умножения» неких абстрактных сущностей, названных событиями, которые аналогичны операциям над подмножествами Ω.

Эмпирическая дедукция аксиом

- **Интуитивно ясно**, что если эксперимент повторен большое число n раз и если при этом через m обозначает число раз наступления события x, то отношение m/n будет мало отличаться от P (x).
- Если события x и y не пересекаются как подмножества Ω (m, m1, m2 – число экспериментов, исходами которых являются события x+y, x, y), то

$$m/n = m_1/n + m_2/n$$

следовательно

$$P(x+y)=P(x) + P(y)$$

- Случай бесконечного числа событий – бесконечное вероятностное пространство: **Аксиома 5** (непрерывности). Для убывающей последовательности непересекающихся событий $x1 \geq x2 \geq \ldots\ldots x_n \ldots\ldots$ имеем

$$\lim_{n \to \infty} P(x_n) = 0$$

Система аксиом Колмогорова является непротиворечивой и полной.

Алгебра А

- Алгебра А событий пространства элементарных исходов называется борелевской алгеброй, если все счетные суммы событий x_n из А принадлежат А. Такую алгебру событий называют «сигма-алгебра».
- Если задана вероятностное пространство в расширенном смысле **(Ω, A_0, P)** , где A_0 – алгебра, P- вероятностная мера на ней, то существует наименьшая сигма алгебра $A = \sigma(A_0)$, содержащая A_0.
- Более того, определенную на **(Ω, A_0)** неотрицательную счетно-аддитивную функцию множества P=P(.) можно продолжить на все множества из А и при этом единственным образом.
- **(Ω, A_0, P) –** называется **вероятностное пространство в расширенном смысле** и оно может быть корректно продолжено до **бесконечного вероятностного пространства (Ω, A, P) .** Множества из сигма-алгебры А вероятностного пространства можно рассматривать как «идеальные события» непосредственно не представленные в экспирементах.

Ω

Критика введенной вероятностной аксиоматики

Есть не согласные с тем, что Колмогоров создал теорию вероятностей как аксиоматическую теорию. Доводы такие

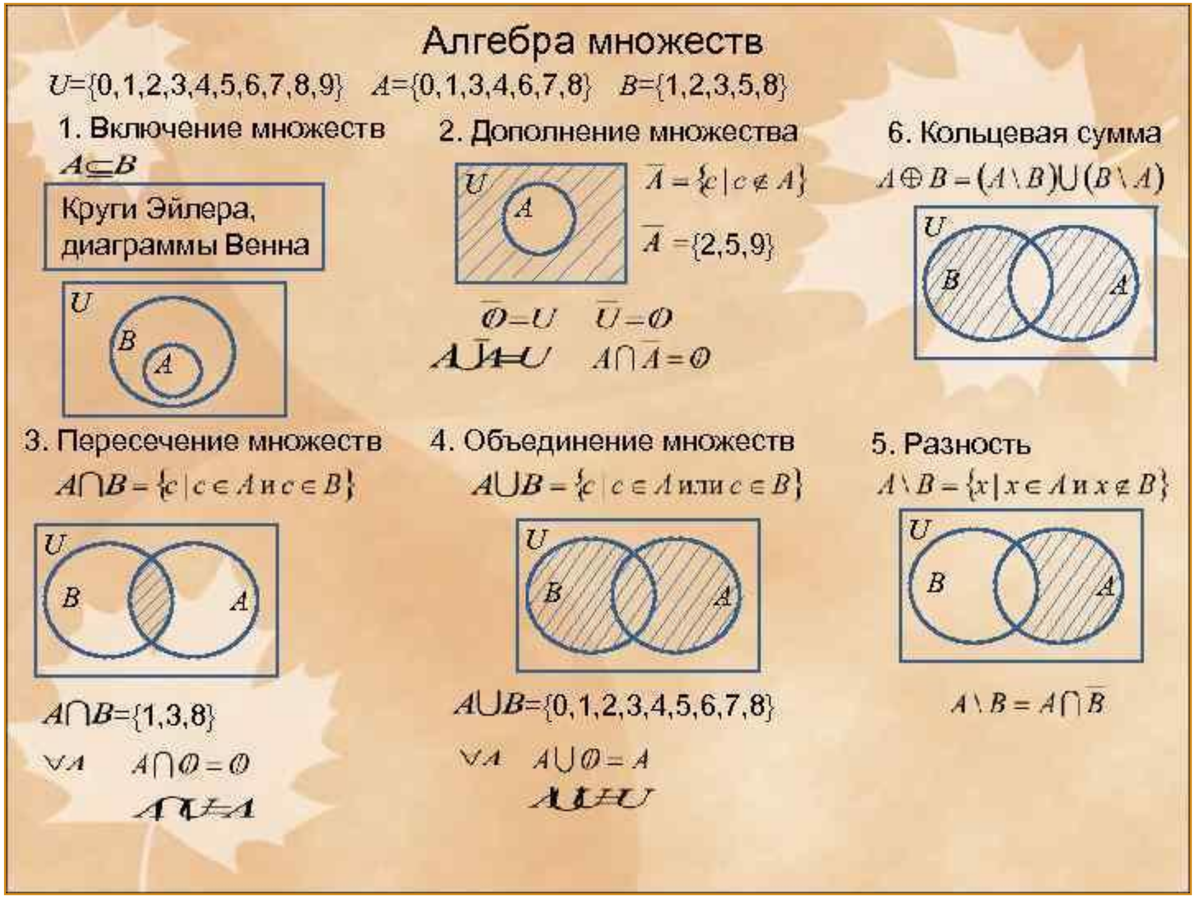
- Вероятность — это понятие реального мира, поэтому её невозможно аксиоматизировать, можно только построить **математическую модель**. (невозможно аксиоматизировать понятие «мост», что не мешает рассчитывать мосты на прочность, строя их математические модели)
- В аксиоматике Колмогорова не вводится ни одного нового неопределяемого «базового понятия» (например, как у Евклида: точка или прямая). Т.е. фактически мы имеем только определение: **«Вероятность — это ограниченная мера P(Ω) =1».**

Что можно на это ответить: в модели Колмогорова вводятся абстрактное понятие «события» и для них предлагается алгебра операций, которая изоморфна алгебре множеств.

Например, в квантовой логике иная алгебра событий, она подчиняется иной аксиоматике, а «квантовая вероятность» строится отлично от классической.

Операции над множествами

Операция – это функция f_i , у которой область определения и область значений принадлежать одному и тому же множеству f_i: X ->X . Множество X вместе с заданным множеством операций F={f1, f2, …} называется алгеброй.

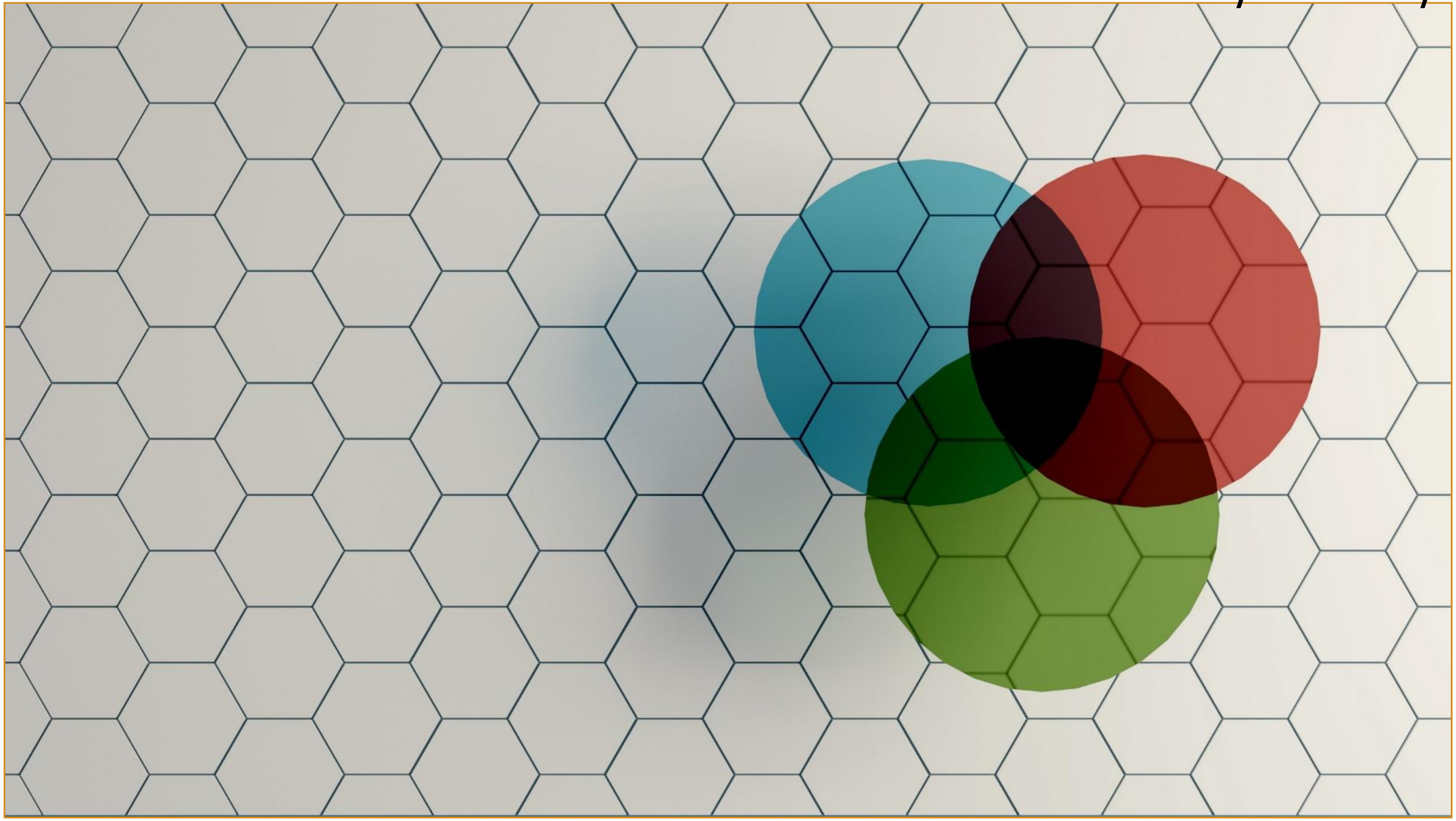


Между объемами понятий, образующих множество, могут быть различные виды отношений: например, **равнозначность**, когда объемы понятий полостью совпадают (привести пример) **пересечение**, когда объемы понятий частично совпадают **подчинения**, когда объем одного понятия полностью входит в объем другого

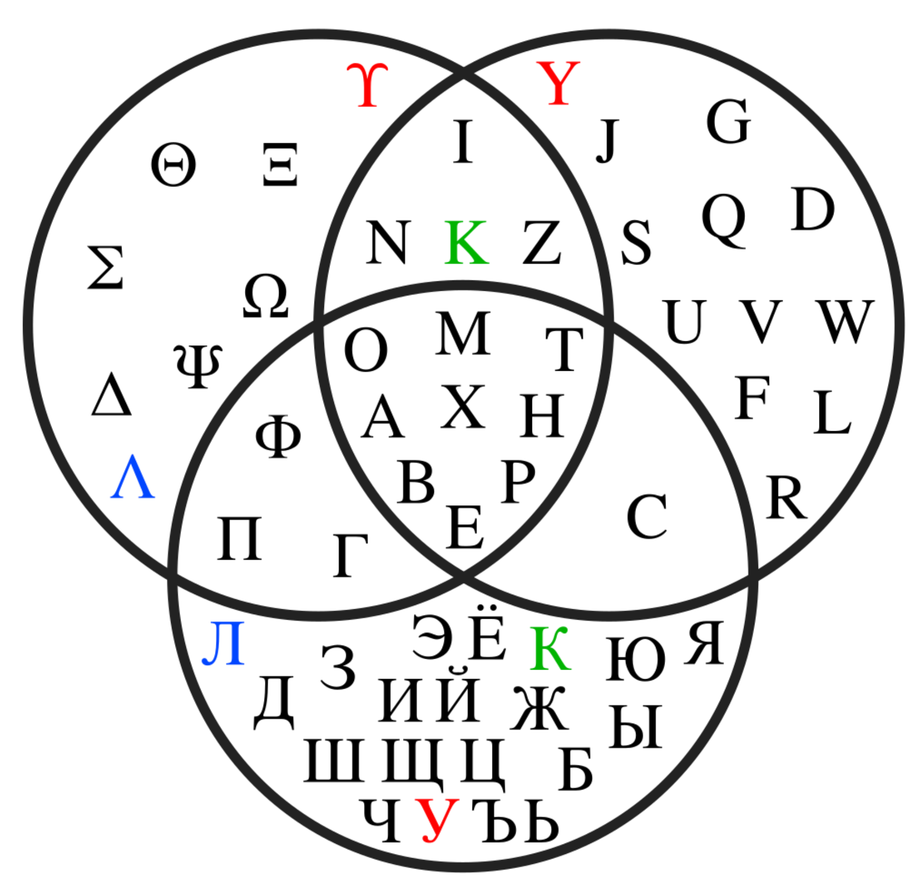
Пример

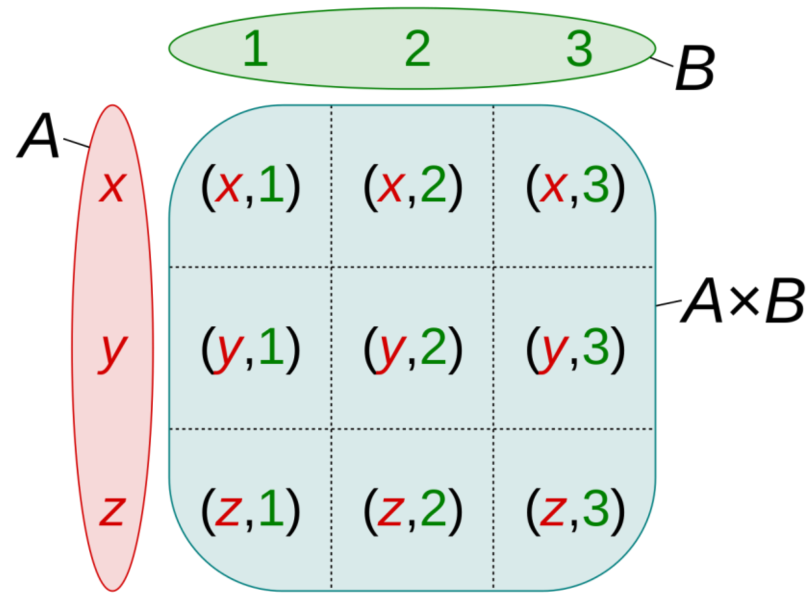
«Множество — это большое количество, которое позволяет воспринимать себя как одно»

Георг Кантор



Алгебра множеств (коммутативные операции объединения, пересечения...



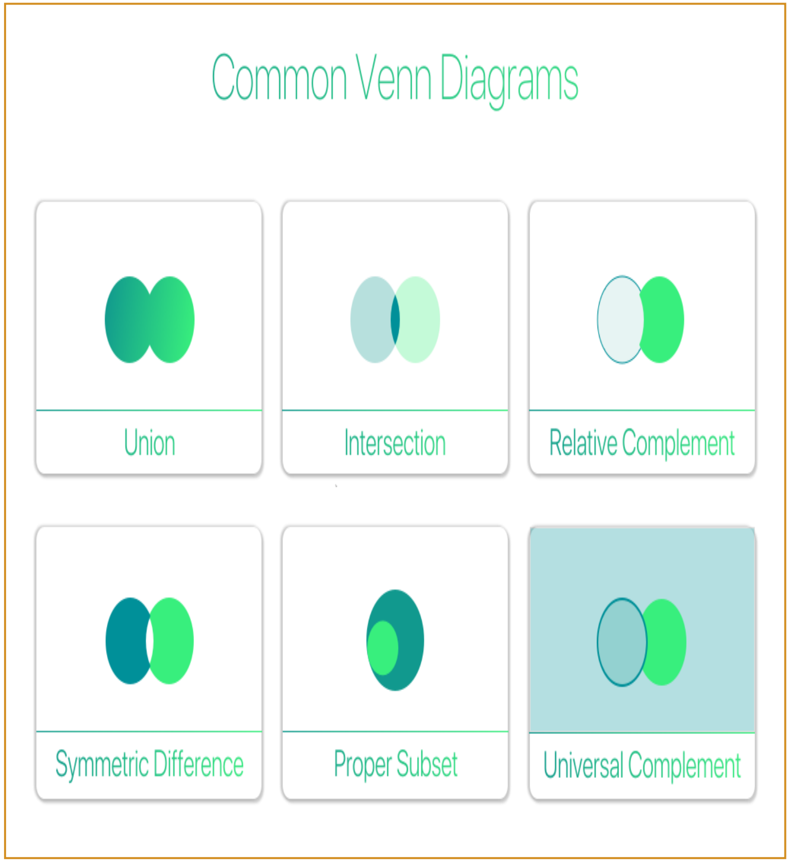


Декартово произведение -множество всех упорядоченных пар элементов из A и B

Диаграмма Венна, показывающая все пересечения графем заглавных букв греческого, русского и латинского алфавитов

Мощность множества (кардинальное число) — характеристика количества элементов множества, формально определяется как класс эквивалентности над множествами, между которыми можно установить взаимно-однозначное соответствие

Операции на базе диаграмм Венна и мощность множеств как общее количество «позиций» в множестве

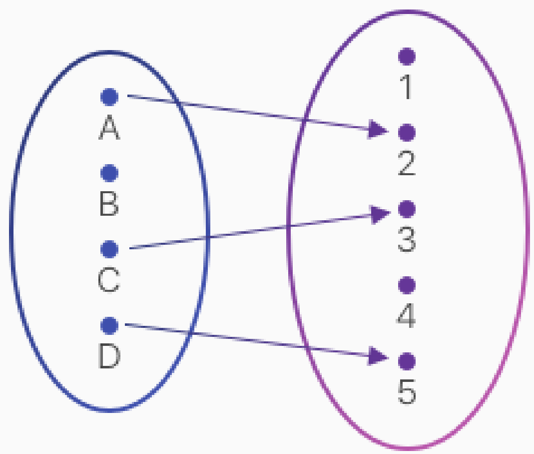


Example	Cardinality
A = { 5 }	|A| = 1
B = { 7,2 }	|B| = 2
C = { 1,3,4 }	|C| = 3
D = { 9,1,5,8 }	|D| = 4
E = { 5,5,5,5,5 }	|E| = 1

Каждый уникальный элемент, добавляемый к множеству, (мощность увеличивается на единицу) увеличивает количество возможных подмножеств на два. Количество возможных подмножеств: $C = 2^{|C|}$ Булеан – это S (C)– множество всех подмножеств

Функции на множествах

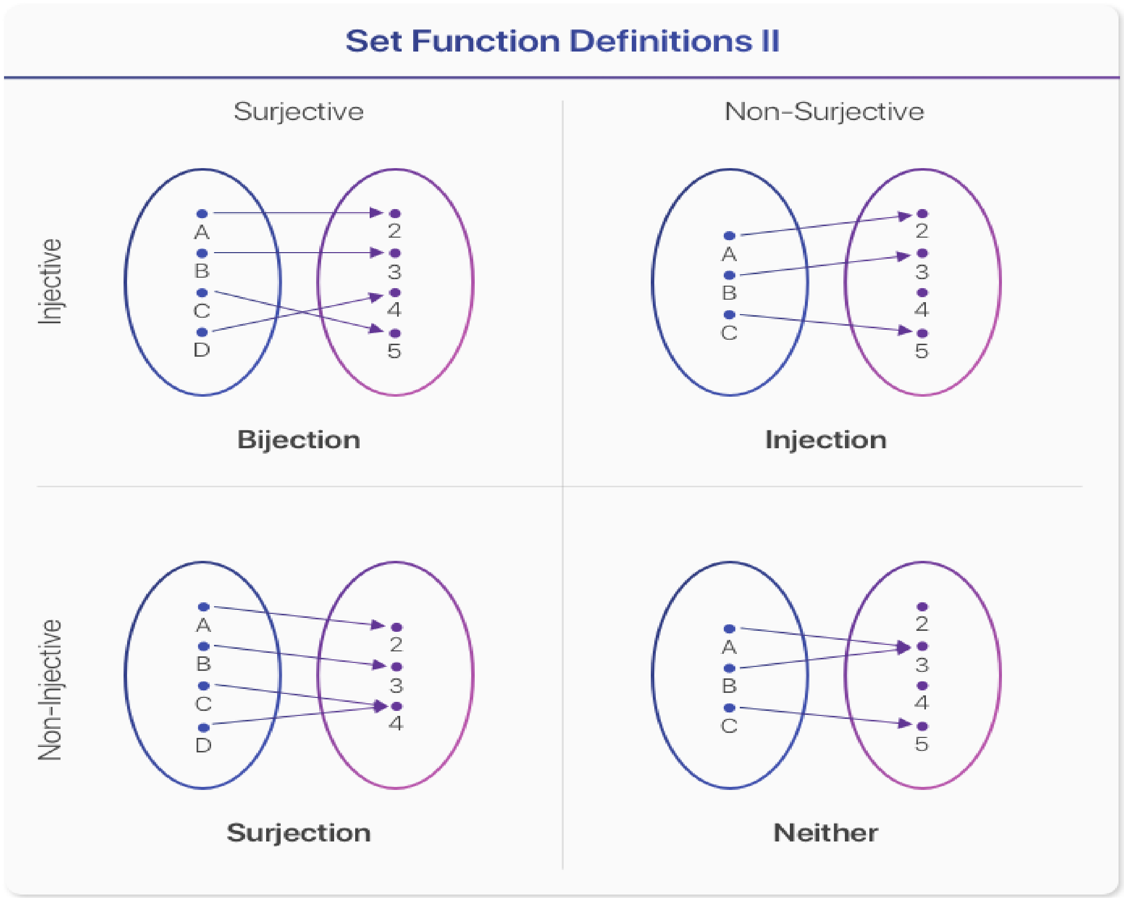
Set Function Definitions I



Domain	{ A,B,C,D }
Arguments	{ A,C,D }
Codomain	{ 1,2,3,4,5 }
Image	{ 2,3,5 }

Функция в теории множеств — это соответствие некоторых (или всех) элементов из Множества A некоторым (или всем) элементам Множества B. Для классификации соответствия используются три понятия: инъекция, сюръекция и биекция. Функция является **инъективной** (или «один к одному»), если каждый элемент в кообласти отображается не более чем на один элемент в области определения; **сюръективной**, если каждый элемент в кообласти отображается не менее чем на один элемент в области определения. (образ и кообласть функции эквивалентны.) **биективной**, если каждый элемент кообласти отображается ровно на один элемент области определения.

Биекция (инъекция + сюръекция), инъекция (инъекция + не-сюръекция), сюръекция (не-инъекция + сюръеция), без классификации (не-инъекция + не-сюръекция)



основы теории множеств — ключ к пониманию теории вероятности, теории информации и других областей математики.

Обобщения

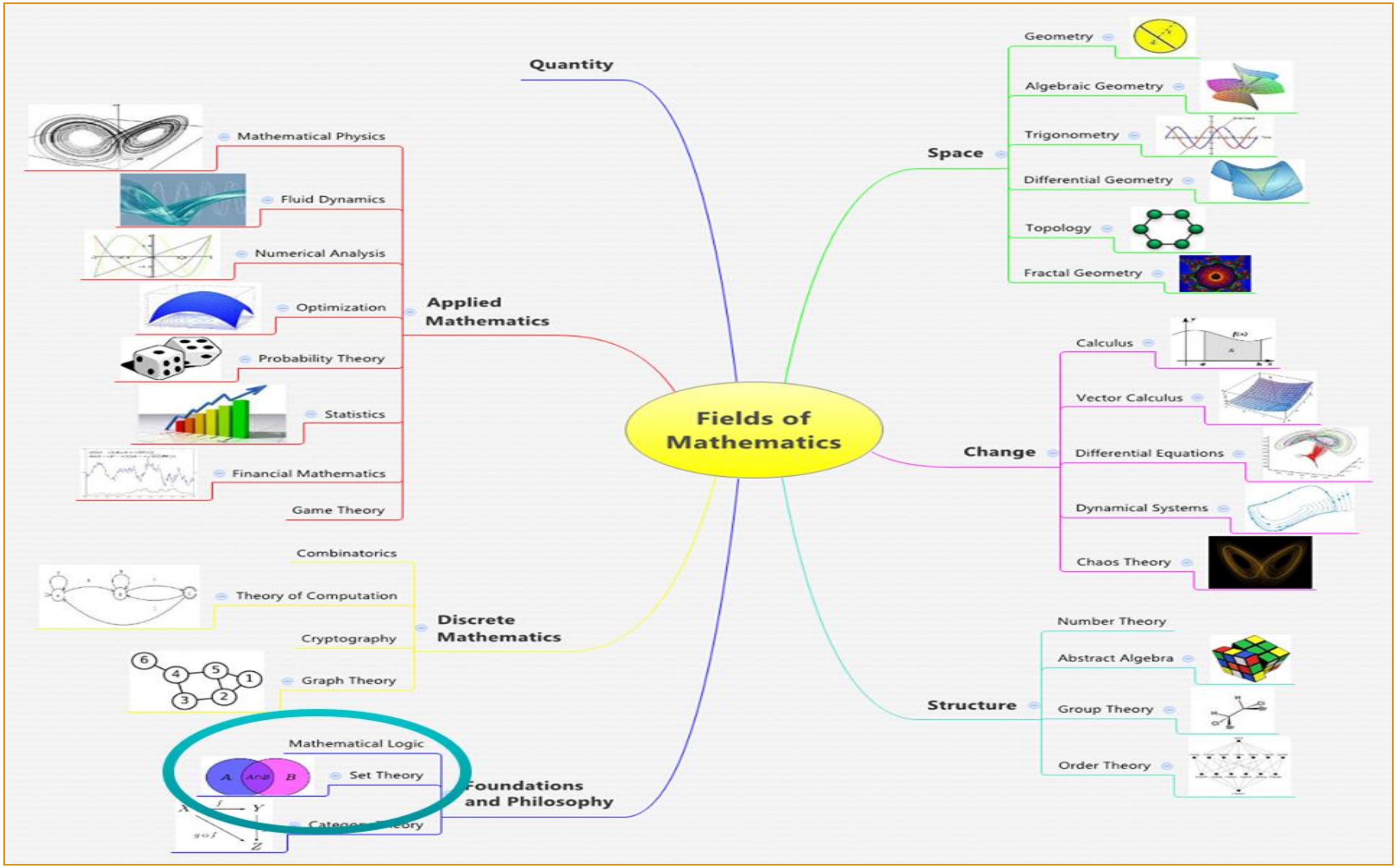
- Теория категорий - изучение свойства отношений между математическими объектами, которые не зависящие от внутренней структуры этих объектов: для каждой пары объектов X, Y задано множество морфизмов стрелок, а для пары морфизмов определена операция «композиции».

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Примеры категорий:

- Множества, морфизмы - отображения
- Группы , морфизмы – гомоморфизмы групп
- Векторные пространства над полем, морфизмы – линейные отображения

Где же место теории вероятности ?



Вопросы для самопроверки:

Какова вероятность того, что гуляя по улице вы встретите динозавра?

- как правильно ответить на этот вопрос?
- Объяснить, почему вопрос сформулирован некорректно ?
- Как можно для рассматриваемого события однозначным образом определить вероятностное пространство, а следовательно вычислить вероятность встречи с динозавтром ?

Выводы

- Информационное описание объектов основано на их характеризации в пространстве возможностей, мера которого задана с точностью до вероятности.
- Полное описание физического объекта требует рассмотрения его свойств в базисе альтернативных состояний.
- Измерение вектора состояния объекта – это редукция многомерного пространства возможных состояний на одномерное множество возможных событий

$$\mu : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{R}^1$$