КАФЕДРА
ТЕЛЕМАТИКА

Санкт-Петербургский
Государственный
Политехнический
Университет

Институт прикладной
математики и механики

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЫ

Лекция 6: Фундаментальные проблемы компьютерных наук

8 апреля
2021 г.

Что обсуждали на прошлой лекции

Экспериментальные исследования состоит из двух частей. Первая – абстрактное целеполагание, связанное с формальным логическим исчислением… Вторую - набор физических операций, на которые можно «декомпозировать» функцию целеполагания, а именно:

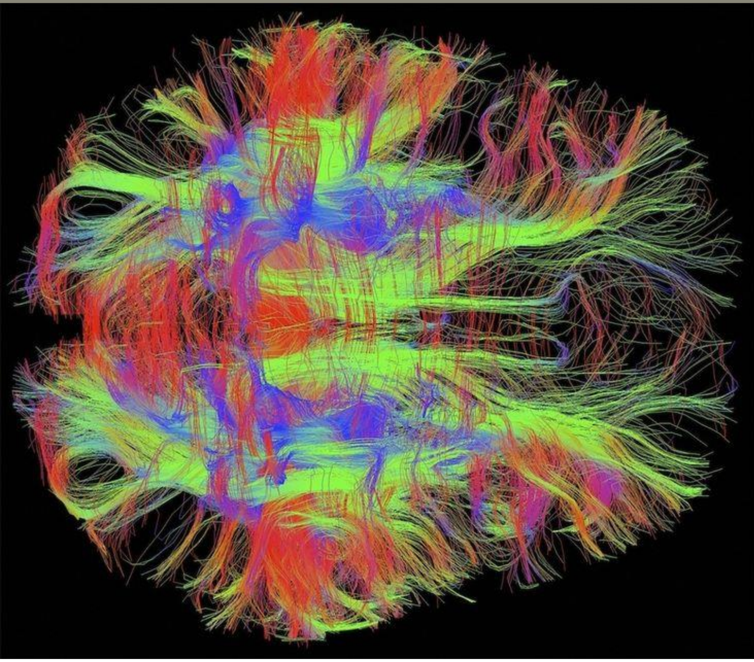
- первичные идеальные математические объекты – числа, которые отражают отдельные свойства объектов
- уравнения (математические выражения законов, действующих в рамках выбранной области знаний), которые объединяют «числа» в цифровую модель ;
- Компьютерные алгоритмы, которые сопоставляют физические свойства объектов цифровым моделям.

Вопрос: Кто и как пишет компьютерные алгоритмы ?

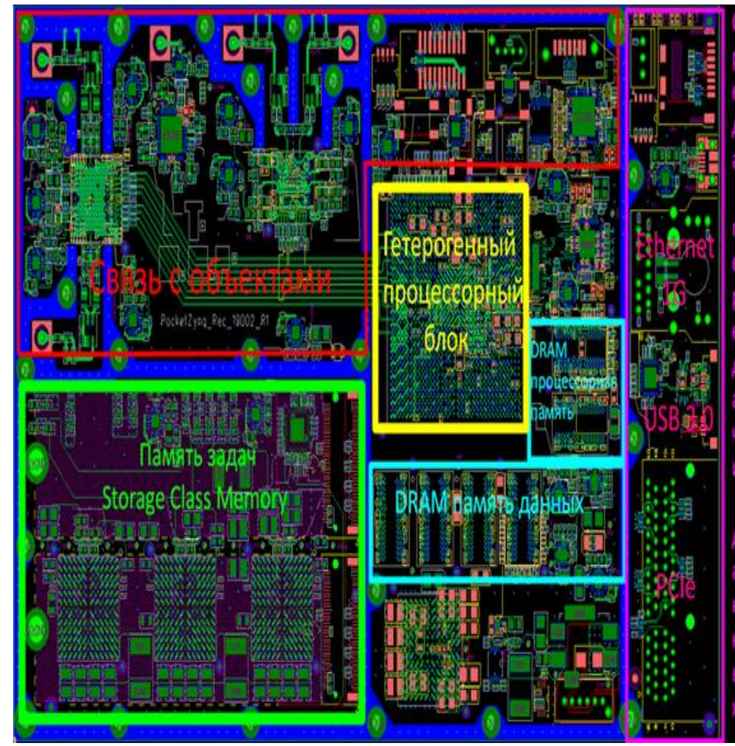
инерция цифрового формализма

В математике существуют формально неизмеримые множества, которые имеют содержание, но не имеют объёма понятий. Другими словами, у них нет свойства аддитивности и количественной тождественности конгруэнтных множеств…(Т.Е. совмещающихся при «физическом» наложении)

Существует ли «промежуточное и физически реализуемое решение» между мозгом и программируемым компьютером ?



?

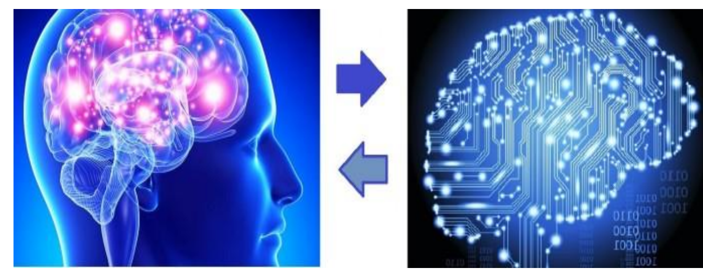


Особенность: Сложность и **ассоциативность**

Особенность: Простота и **алгоритмичность**

Первая фундаментальная проблем КН

Первая проблема:
Алгоритмическое описание когнитивных функций мозга имеет мощность континуума, а функций, реализуемых на цифровом компьютере, – счетного множества.



Эта проблема отражение континуум-гипотез или **Первой проблемы Гильберта** , а именно «Любое бесконечное подмножество континуума является либо счётным - имеет мощность множества целых чисел, либо континуальным – имеет мощность множества вещественных числе».

Вторая фундаментальная проблема КН

Вторая проблема:

Вычислимы ли

с помощью алгоритма

когнитивные функции ?

Эта проблема есть отражение второй проблемы Гильберта, которая звучит так: **противоречивы или нет аксиомы арифметики?**

Курт Гёдель доказал, что непротиворечивость аксиом арифметики нельзя доказать, исходя из самих аксиом арифметики

2+ или третья фундаментальная проблема КН

Третья проблема:

- Можно ли по виду виртуального объекта, вычисленного на компьютере, сказать, что этот объект физически реализуем

«при каких условиях существует биекция между логическим выводом, основанном на аксиоматической теории и эмпирическим вычислительным процессом, который потенциально может быть носителем ошибкок в компьютерной программе» ?

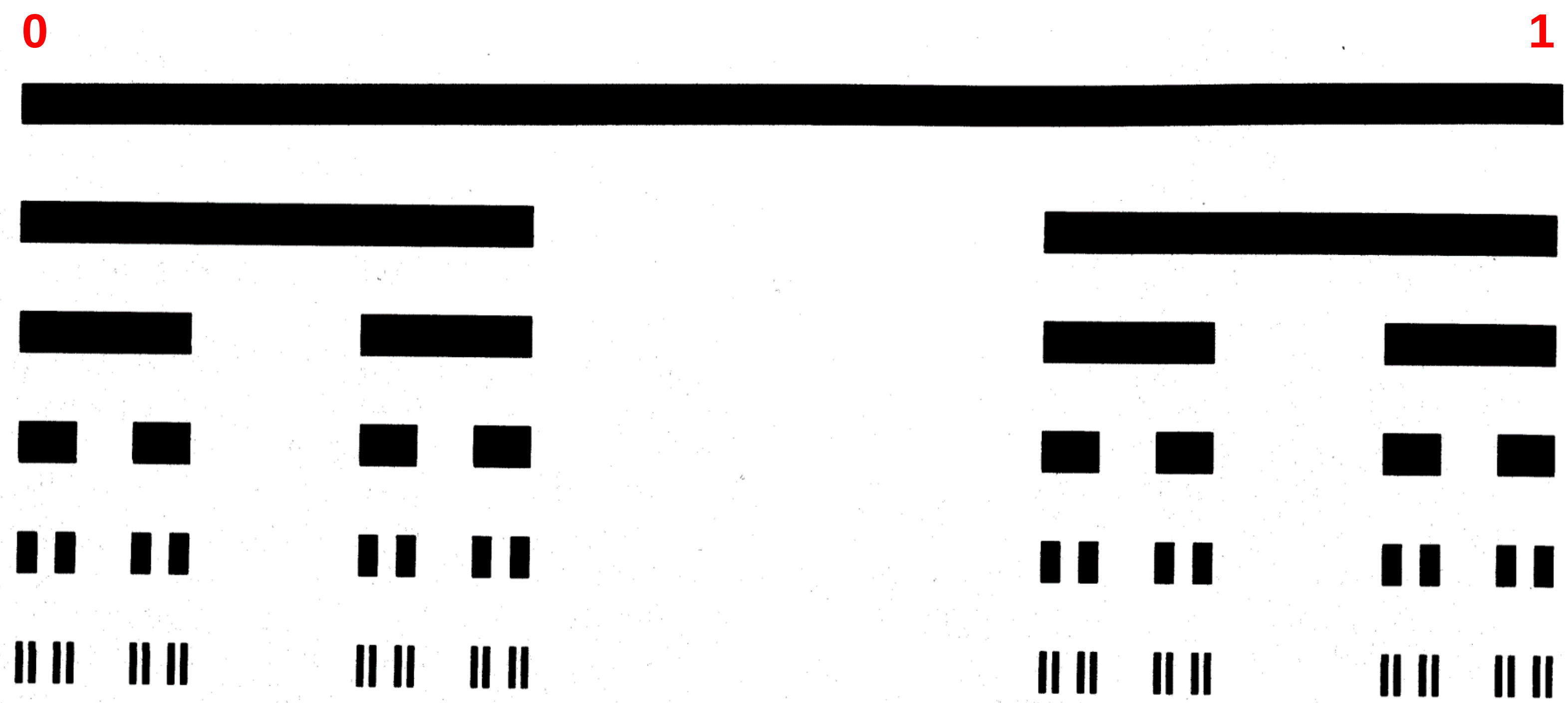
В каком то смысле подобна 10 проблеме Гильберта: Найти алгоритм, чтобы определить, имеет ли данное полиномиальное диофантово уравнение с целыми коэффициентами целочисленное решение. Из теоремы Матиясевича (1970) следует, что такого алгоритма не существует.

Парадоксы КН – «черные дыры» математики

- **Актуальная бесконечность**: отрезок [0,1] является конечным объектом, поглощающим «бесконечно развертывающийся процесс». Суть всех математических парадоксов – сведение «состоявшейся бесконечного» к «конечному» . Бесконечные множества X, Y равномощны, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.
  - Множество действительных числе отрезка [0,1] несчетно.
  - Квадрат и отрезок равномощны: Точки квадрата [0,1]x[0,1] с координатами $x=0,a_1a_2\ldots$, $y=0,b_1b_2\ldots$ сопоставляются точкам отрезка [0,1] $z=0,a_1b_1a_2b_2\ldots$

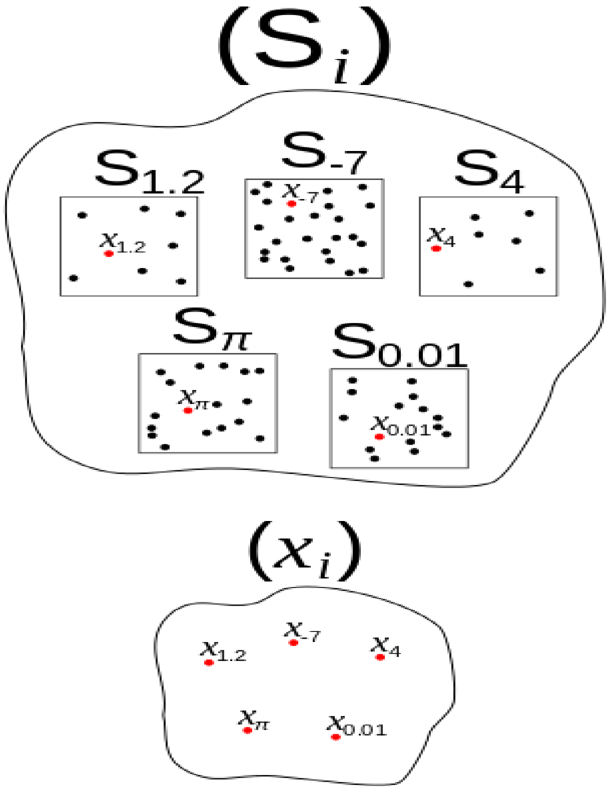
  (разные точки отрезка, например, 0,11; 0, 100909; 0,01909 переходят в одну и ту же точку квадрата {0,1; 0,1}.
- Отобразить отрезок [0;1,1] в отрезок [0;1] используем функцию ->$f(x)=x/1,1$

Канторово множество – суть самоподобия любого континуума



Имеем: Из континуального множества [0,1] вычитается счетное множество точек - 1/3 + 2/9 +4/27 + … =1. Т.ею, из отрезка [0,1] «выбросили» всю его «длину» и …. получили множество С, а именно, пересечение замкнутых множества, которое равномощно континууму. С не счетно !!! Поэтому его можно непрерывно отобразить на [0,1]. **Между континуальным и счетным множеством нет «промежутка».**

Аксиома выбора



Пояснения. (Si) семейство непустых множеств, проиндексированных множеством действительных чисел R. Для каждого действительного числа i существует множество Si. На рисунке приведен пример выбора элементов множеств. Каждое такое множество Si непусто, а возможно и бесконечно.

Аксиома выбора позволяет произвольно выбирать один элемент из каждого множества, формируя соответствующее семейство элементов (xi), также проиндексированных множеством действительных чисел R, где xi выбраны из Si.

Формулировка: Для всякого семейства X непустых множеств существует функция f, которая каждому множеству семейства сопоставляет один из элементов этого множества. Функция f называется функцией выбора для заданного семейства.

Аксиомы выбора позволяет строить неизмеримые множества , т. е. наборы точек, которые **не имеют объема в обычном смысле** и построение которых требует **бесчисленного количества шагов (вариантов)** выбора.

Следствия-парадоксы из аксиомы выбора

- **Брадобрей**. Вождь повелел, чтобы единственный брадобрей деревни брил тех и только тех мужчин, которые не бреются сами. Должен ли он брить себя?

- **Каталог**. Библиотека решила составить библиографический каталог, в который входят те и только те каталоги, которые не включают себя. Включает ли такой каталог себя?
  - Кантор утверждал, что нельзя задавать множества произвольными **словосочетаниями**, то есть не любое свойство должно определять множество, например, сюда относится понятие “множество всех множеств”.

Борьба с парадоксами, предложенная Кантором, такая: Разрешается работать с множествами, которые “встречаются в природе” или получаются из них “разумными” (физически вычислимым) набором операций.

Парадокс Банаха-Тарского

X Y

Парадокс удвоения шара (1926) - трёхмерный шар равносоставлен двум своим копиям.

Ввиду своей неправдоподобности, этот парадокс часто используется как довод против принятия аксиомы выбора, которая существенно используется при построении такого разбиения.

Суть парадокса заключается в том, что в трёхмерном пространстве существуют неизмеримые множества, которые не имеют объёма, если под объёмом мы понимаем то, что обладает свойством аддитивности. Итак, множество X парадоксально разложимо на множество Y.

Определение: два подмножества евклидова пространства называются равносоставленными, если одно можно разбить на конечное число «кусков» и составить из них второе. При этом для удвоения шара достаточно пяти кусков, но четырёх недостаточно.

Нас не удивляет, что функция y=2*x позволяет передвигать точки отрезка [0,1] так, чтобы получился отрезок [0,2]

Очевидно, что «куски» в таком «разрезании» шара не образуют измеримое множество (… невозможно осуществить такое разбиение какими-либо физическими операции на практике).

Парадокс Банаха-Тарского (2)

Для того, чтобы **что-то** сделать экспериментально нужен: 1) «объект» и … 2) соотвествующий «инструмент». В виртуальном мире **объектом** является информация, а **инструментом** — компьютер.

В КН парадокс Банаха-Тарского не имеет место: при копировании цифрового **объекта** числовой код копии может быть такой же как у самого объекта, но адреса хранения ячеек памяти – у объекта и копии разные, следовательно копия – это именно клон, а не тот же самый объект.

Итак, твердый шар в 3-мерном пространстве можно разложить на **конечное** число непересекающихся подмножеств (деталей), которые затем могут быть собраны так, чтобы получить две идентичные копии исходного шара. Процесс **сборки** включает в себя только перемещение и вращение деталей без изменения их формы. Однако сами по себе детали - это не «твердые тела» в обычном понимании, а **бесконечные** множества точек. В результате **сборка** деталей воспроизводит шар, который отличается от объема, который был в начале.

Парадоксы функций - Разрывные линейные функции

Линейная функция обычно определяется следующим свойством

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (*)$$

Если $f(x)=k*x$, то из уравнения следует $f(p*x) = p*f(x)$ для любого целого p.

Для $z=p*x$ имеем $f(p/q*z)=p/q*f(z)$

или $f(p/q)=f(1)*p/q$,

откуда $f(x)=k*x$

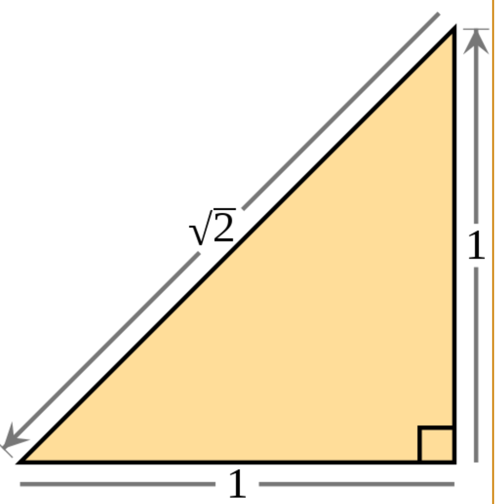
Аксиома выбора позволяет … найти другое решение. Понятие базиса Гамеля – $\{e_1, e_2, \ldots e_n \ldots\}$ -> $x=sum_i \; x_i*e_i$ Базис можно построить и в бесконечномерном случае. Если требовать «рациональность» координат, то действительная прямая становится бесконечномерным векторным пространством. Например, 3 и sqrt (2) линейно независимы, поскольку $m_1*3+m_2*sqrt(2)=0$ невозможно при рациональном m_1

Выберем базисный вектор e_m=sqrt (5) или e_m=1, положим

$$f(x)=k*x_m$$

Эта функция удовлетворяет (*)

Конструктивные числа



- Основным понятием математики вообще является понятие числа. Проблема, состоит в том, что большинство разделов математики оперирует понятием действительного числа, которое не может быть получено через способность человека к счету.
- При конструктивном подходе к определению вещественного числа вещественные числа строят, исходим из того, что механически можно выполнять лишь операции с целыми числами.
- Под операциями понимаем операцию сложения, умножения на -1, а также сравнения двух целых чисел. Поскольку рациональное число представляет собой пару целых чисел (числитель/знаменатель), то эти же операции можно считать механическими и для рациональных чисел.
- Проблема в открытии несоизмеримости величин. С этого момента в математике потребовались числа, которые не вычисляются механически обозримыми. Согласно тезису Черча-Тьюринга любая интуитивно вычислимая функция может быть вычислена с помощью машины Тьюринга .

Что важно понимать

- **Фундаментальные знание** – это отношения между понятиями, которые включают в себя :
  - интенсиональное описание проблемной области (прикладная онтология – описание проблемной области),
  - интенсиональное описание ситуации (онтология текущей ситуации) ,
  - экстенсиональное описание ситуации (контекст использования) и вытекающее из него множество возможных решений

Итак:

- **Фундаментальные проблемы КН** это представленные в «счетной форме» форме математические парадоксы, разрешая которые можно сделать рациональные (логически целостные) заключения на основании конкретных данных, используя некоторую систему суждений, законы, характерные для рассматриваемой проблемной области, онтологию текущей ситуации и контекст использования знаний.

Заключение

«Истина всегда рождается как ересь, а умирает как предрассудок»

(Гегель).

Вопросы :

1) Можно ли то, **чего нет** физически, представить с помощью цифровой «модели» ?!

Да , например, число «π» ……

2) Если процессы обладают нулевой энергий, можно ли их исследовать ?!

(«нуль» – это, либо нечто, либо разность двух одинаковых количеств)

Да, виртуальные частицы с нулевой энергией возможны, но их наблюдать нельзя. Такие частицы могут оказывать действие на внесённые в «физический вакуум» реальные объекты. Но это воздействие нефизическое, а информационное , значит ли это, что у виртуальных частиц «есть память» ? .