КАФЕДРА
ТЕЛЕМАТИКА

Санкт-Петербургский Государственный Политехнический Университет

Институт прикладной математики и механики

Введение в профессиональную деятельность

Лекция 14: Структура знаний в математических науках

СПб,
28 апреля, 2021г.

Эволюционная характеризация (1)

Структура античного математического знания:

- пифагорейцы (570-495 век до н.э.) делили математику на две части: числа (1) и пространство (2), и каждая часть состоит из двух частей:
  - Числа существуют сами по себе или по отношению к другому:
  - пространственная величина или покоится или движется.
- По Гемину (1 век до н.э. - древнегреческий математик и астроном): предмет математики состоит из двух частей:
  - воображаемое (1) и
  - чувственное (2).

  В свою очередь,

  первая часть (воображаемое) состоит из арифметики с учениями о линейных, плоских (1.1.2) и пространственных (1.1.3) числах и геометрии , которая подразделяется на планиметрию и стереометрию ().

  вторая часть (чувственное) состоит из механики , астрономии, оптики (2.3), геодезии, каноники (логика) и логистики (наука об управлении),

Эволюционная характеризация (2)

- Раймунд Луллий (1235-1315 гг.) первая машина «вычисления» ….истины или механическая экспертная система + база знаний – позволяющая свести к логическим операциям вывод «формул знаний».
- В 16 веке Петр Рамус (1515-1572 гг) вводит понятие «простая» и «сравнительная» арифметики, выделяя из них алгебру:
  - Простая арифметика «рассматривает природу простого числа»,
  - сравнительная арифметика «производит сравнение чисел по количеству и качеству».
  - Алгебра - часть арифметики, где вместо чисел, соответствующих значениям фигур, изучается собственно исчисление, которое рассматривается в двух аспектах - счисление и уравнение
- Новое время - возникновение
  - дифференциального и интегрального исчисления (Ж.Даламбер , Лейбниц, Ньютон), алгебра бесконечно малого/большого, математический анализ
  - теории вероятности, аналитическая геометрия, аналитическая механика
  - идеи программного управления (Корсаков, Беббидж) вычислениями и выводами (А. Лавайс: машина может выполнять все то, что мы умеем ей предписать)

...что мы умеем предписать.... *комментарий*

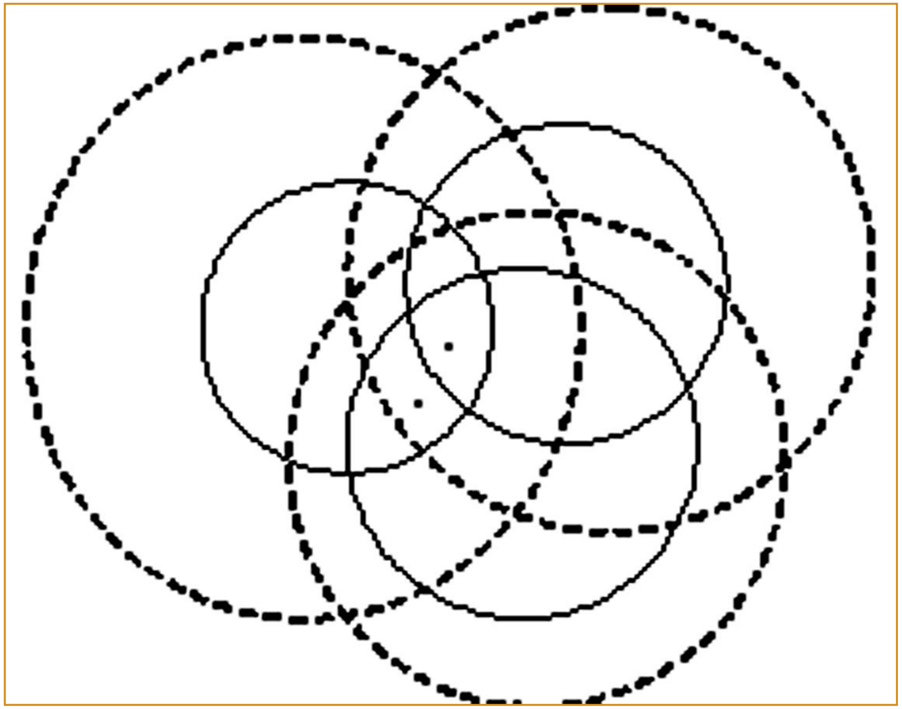
- Невозможно выработать правила или предписания для всех всевозможных обстоятельствах. Любая попытка сформулировать предписания или правила действия, предусматривающие любой возможный случай, обречена на провал.
- Герберт **Саймон** (1916 -2001 г.) большей частью своеобразие и изменчивость поведения, присущие живым существам, возникли скорее благодаря сложности их окружающей среды, чем благодаря сложности их внутренних «программ» – цель проста, ее достижение сложно…
- Гипотеза Ньюэлла — Саймона (гипотеза о физической символьной системе. 1976 г.) «физическая символьная система имеет необходимые и достаточные средства для произведения основных интеллектуальных операций» (для интеллекта нужны не численные, а символьные вычисления) . Эту гипотезу критикует Х. Дрейфус с позиций теории научения – вывод: формальные правила, представленные с помощью алгоритмов, не обладают достаточной гибкостью, чтобы работать в различных контекстах. Нужная специализированная система, которая способная к имплицитному восприятию информации без численных вычислений.

Эволюционная характеризация (3)

- Тенденция к ее усложнению (Гаусс, Лобачевский, Абель, Кантор, Пуанкаре, Клейн, Гильберт, Колмогоров, Мальцев….):
  - изучаются не числа, а алгебраические, порядковые и топологические структуры, которые
    - включает в себя: 1) задание одного или нескольких отношений, в которых находятся элементы множества М
    - отношения удовлетворяют условиям, которые являются аксиомами рассматриваемой структуры

Итого, построить новую математическую теорию для данной структуры – это значит вывести логические следствия из аксиом структуры

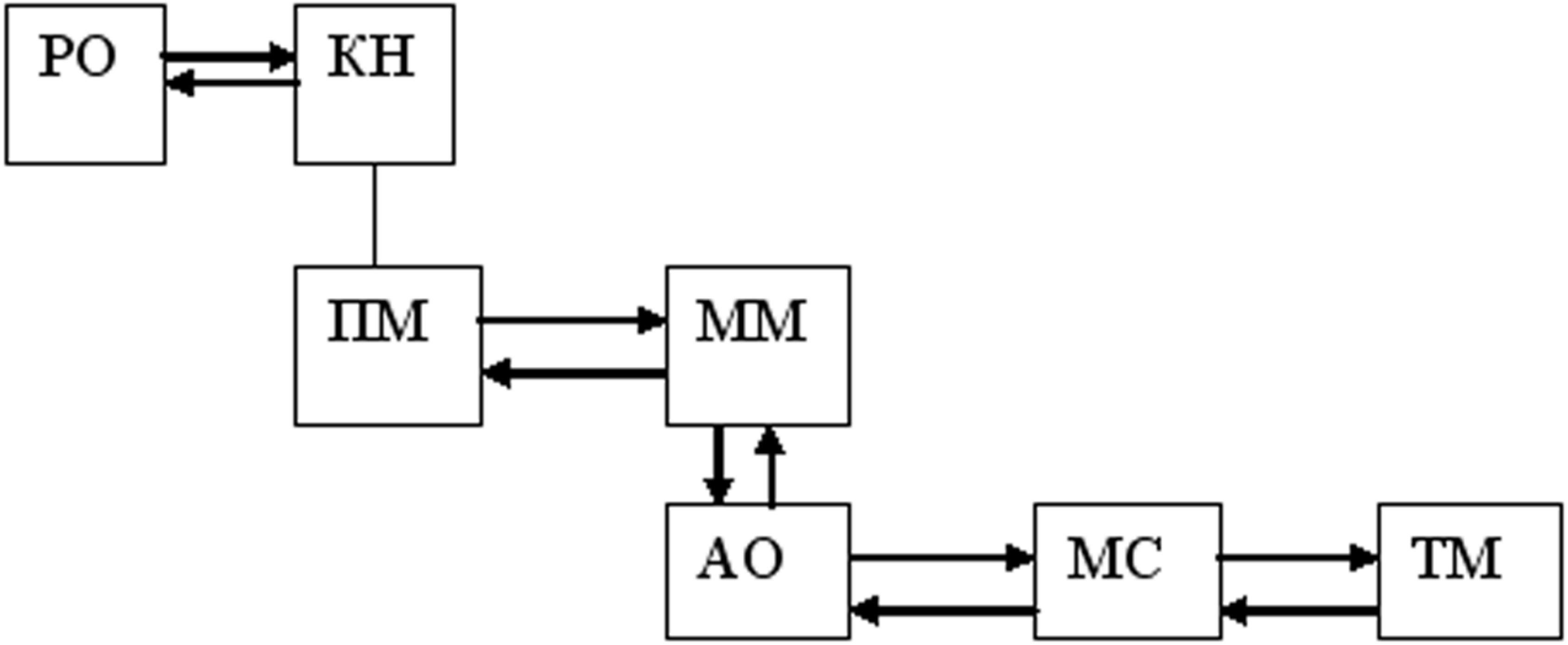
Обратно к дедуктивной теории



Структура математики по Н. Бурбаки: алгебраические структуры, структуру порядка, топологические структуры.

Традиционное развитие математического знания реализуется вычислительно-алгоритмическим путем. Но с середины XX века происходит постепенный отход от аксиоматического построения математических теорий и начинает преобладать конструктивное направление математических теорий

Структура современных математических знаний

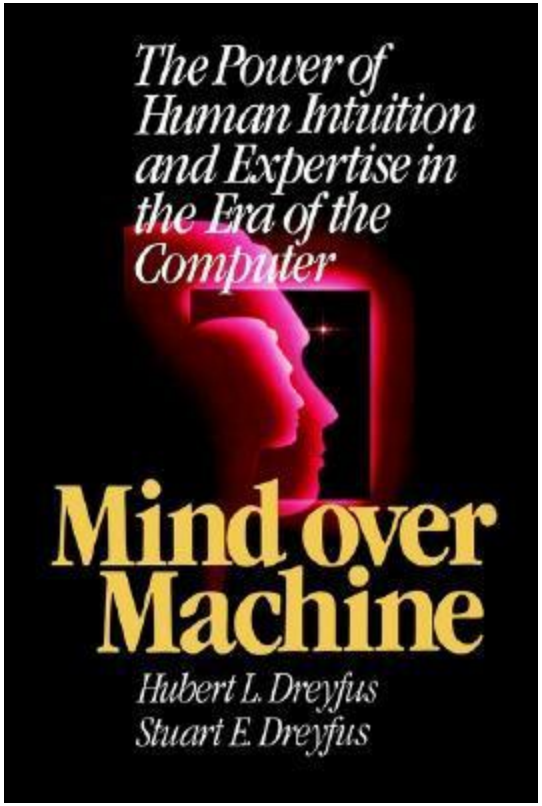


Объект/предмет современной математики: РО – **реальный объект**, КН – конкретные науки, ПМ – прикладная математика, ММ – математическая модель, АО – абстрактный объект, МС – математические структуры, ТМ – **теоретическая математика**

Дальнейшее усложнение: теория научения или идея «бессознательных вычислений» -

Фундаментальный вопрос: где находится **limits of computer technology ???**

- **Learning How to Learn**: Powerful Mental Tools to Help You Master Tough Subjects. См. Coursera.org. URL: https://ru.coursera.org/learn/learning-how-to-learn#instructors
- The Role of Cognitive Architectures in General Artificial Intelligence // Cognitive Systems Research. 2018. Vol. 48. P. 1)
- Dreyfus, H. L. (1986). Mind over machine: The power of human intuition and expertise in the age of the compute



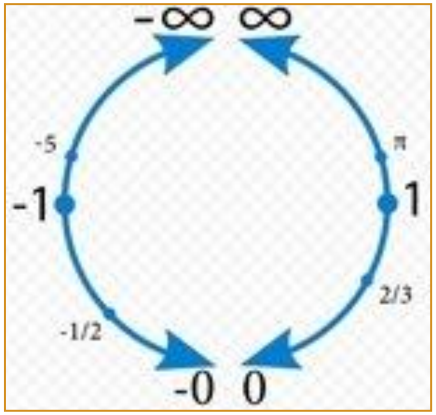
Экспертные системы — как компьютерные программы

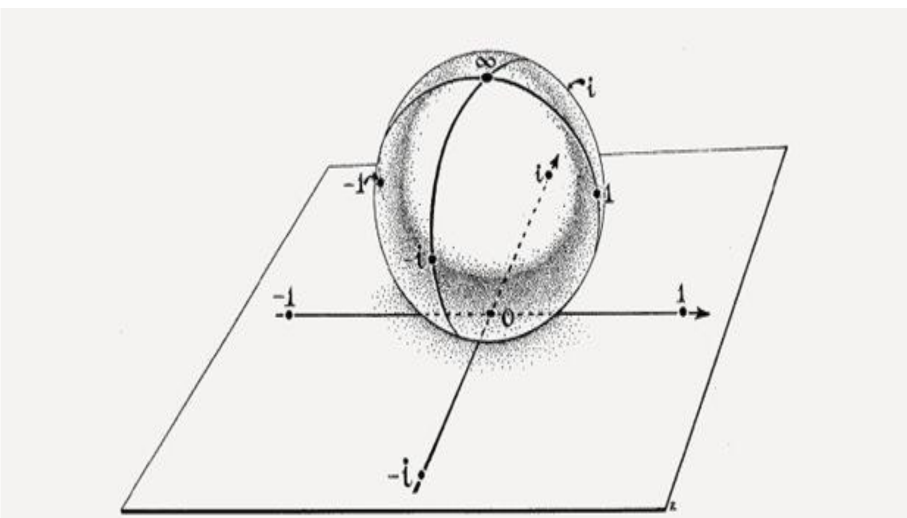
Экспертные системы работали с тремя видами знания:

- Во-первых, используют общие правила и стратегии, например поиск решения в базе данных или обратный вывод
- Во-вторых, работают со множеством специальных фактов, которые обычно можно найти в «учебниках и статьях из этой области»
- В третьих, используют эвристическое знание, построенное на опыте экспертов и их «искусстве верно угадывать» решение проблемы.

ЭС состоят из «базы знаний», в которой находятся экспертные данные, и «машины вывода» (inferential engine) – задача которой найти скрытые правила (эвристики) верного угадывания… что можно сделать, например, с помощью нейронных сетей.

Многомерные числа





1. $\frac{0}{0}$
2. $\frac{\infty}{\infty}$
3. $0 \cdot \infty$
4. $\infty - \infty$
5. 1^{∞}
6. ∞^{0}
7. 0^{0}

действительные числа 1, 2, 3 и т.д. можно представить в следующем виде:

$1 *\infty^0$, $2 *\infty^0$, $3 *\infty^0$ и т.д.

где степень, в которую возведена бесконечность, говорит об измерении, в котором находится значение

… многомерные числа

Имеем: $1 * \infty^0$, $2 * \infty^0$, $3 * \infty^0$

Итак, нулевая степень значит обычное (классическое) измерение числа.

Соответственно 1, 2, 3 и т.д. степень говорит нам о том, что значение находится на одно или несколько измерений выше чем классическое и в классическом случае это бесконечность.

- для начальных условий принимаем $0 = 1 * \infty^{-1}$.
- Если делим на ноль любое число, то степень бесконечности увеличивается на единицу, если умножаем - то уменьшается.

  получаем : $X / 0 = X/(1 * \infty^{-1}) = x * \infty^1$.

Многомерная арифметика

- Если обычное число представить как:

$X*\infty^{0}+X*\infty^{-1}+\ldots.. X*\infty^{-n}\ldots. X*\infty^{-\infty}$ становиться ещё интереснее.

В программировании можно задать бесконечный список, с помощью которого можно описать вышеприведённое число.

Можно вычитать и складывать бесконечность с обыкновенными числами без потери данных.

Например:

$1*\infty^{1}+20*\infty^{0}$

Правила умножения и деления в многомерной арифметике, такие же как в классической арифметике с умножением и делением:

$(5*\infty^{0}+20*\infty^{-1})*(2*\infty^{1}+5*\infty^{0})=10*\infty^{1}+40*\infty^{0}$

Числа Кэли

- А́лгебра Кэ́ли — определённый тип гиперкомплексных чисел, 8-мерная алгебра над полем вещественных чисел

$$x = x_0 + x_1\,i + x_2\,j + x_3\,k + x_4\,l + x_5\,il + x_6\,jl + x_7\,kl.$$

алгебра Кэли является единственной 8-мерной вещественной альтернативной алгеброй без делителей нуля. Эта алгебра неассоциативна и некоммутативна.

Мера и категория

- Меры Жордана, Бореля и Лебега
- Канторово множество ненулевой меры
- Измеримые функции

Метрические пространства

- Метрика и топология
- Объекты «бесконечной» размерности
- Принцип непрерывности

Теория вероятностей

- Сигма- алгебра
- Проблемы в основаниях теории вероятности
- Сходимость случайных величин

Алгоритмическая неразрешимость

- Алгоритмы и вычислимость
- Перечислимость и разрешимость
- Не формализуемость истины и не аксиоматизируемость арифметики

Заключение

- Интеллектуальные функции не являются алгоритмически вычислимыми
- Системы «искусственного интеллекта2 – это лишь новые инструменты, повышающие точность принятя интеллектуальных решений
- Полнота и точность принимаемых решений находятся в отношении противоречия, поэтому для конкретных технических систем выбор должен носить характер «смыслового транссцендетного коспромисса».