КАФЕДРА
ТЕЛЕМАТИКА

Санкт-Петербургский
Государственный
Политехнический
Университет

Институт прикладной
математики и механики

Введение в профессиональную деятельность

Лекция 10: компьютерные науки: инерция и парадоксы цифрового формализма (часть 2)

СПб,
7 апреля, 2021г.

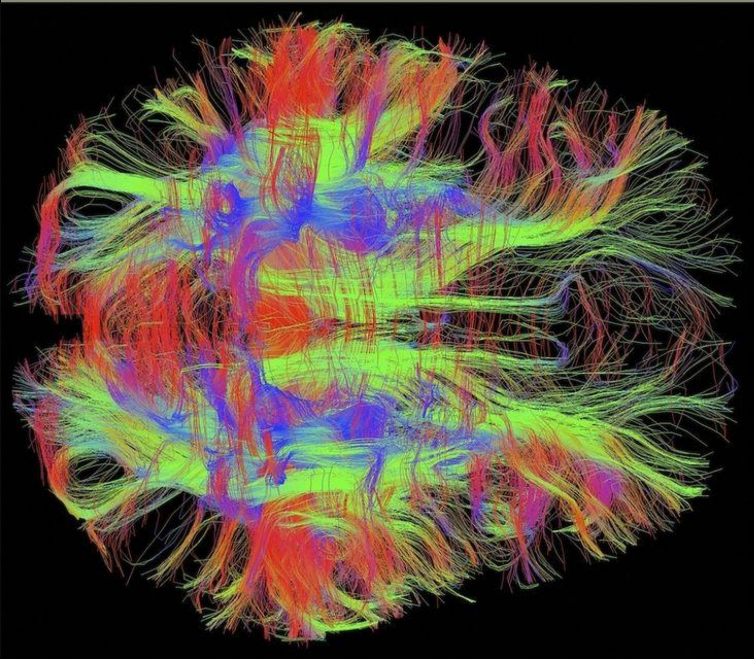
Что обсуждали на прошлой лекции

В Природе существуют «не вычислимые» с помощью цифровых компьютеров сущности (это такие свойства как эмержентность, феномены интуиции, целеполагания и пр.)
Поэтому компьютерную парадигму «Существует то, что можно измерить или вычислить с помощью алгоритмов» (computo ergo sum) необходимо уточнить, а именно дополнить методами «объяснения» полученных решений.

Итак, большинство мыслимых образов и проявлений, которые являются естественным отражением окружающей реальности человеческим сознанием, не формально вычислимы, так как не имеют адекватного алгоритмического представления, т.е. «не вкладываются в цифровую модель реальности» которая изоморфна множеству состояний современных компьютеров.

В принципе нужны такие вычислительные платформы, которые являющиеся симбиозом ИИ + ОИ (искусственный и объяснительный интеллекты)

Между мозгом и программируемым компьютером – существует ли «промежуточное решение» ?

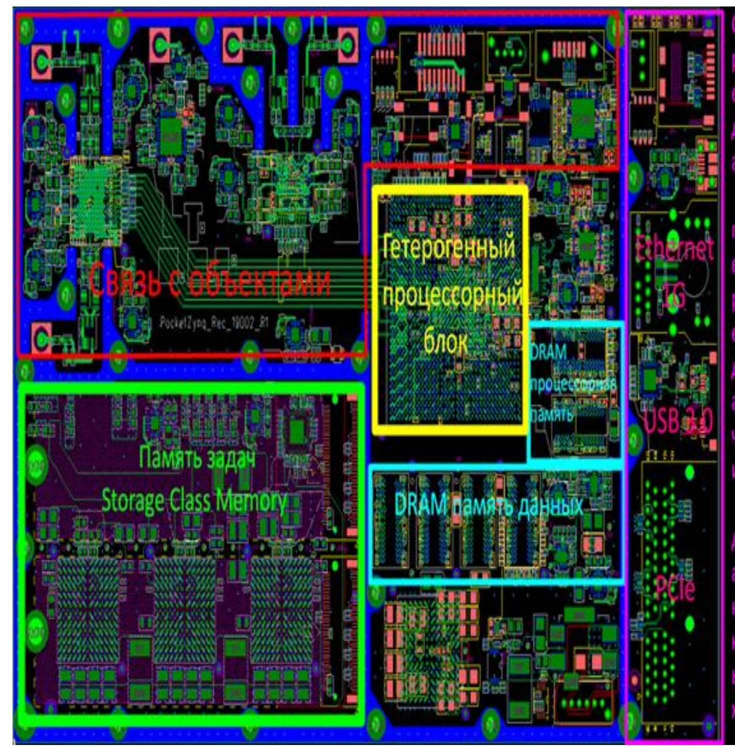


Сложность и **ассоциативность**

.
.
.

?

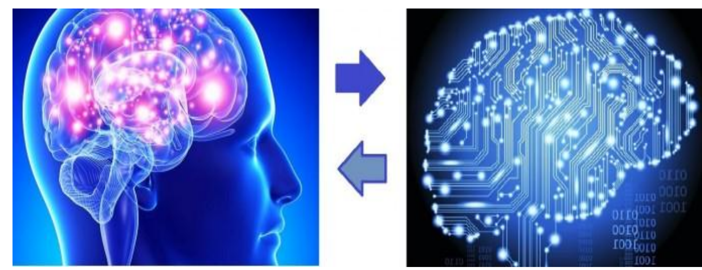
.
.
.



Простота и **алгоритмичность**

Первая фундаментальная проблем КН

Первая проблема: алгоритмическое описание работы мозга имеет мощность континуума, а компьютера – счетного множества.



Эта проблема отражение континуум-гипотез или **Первой проблемы Гильберта** , а именно «Любое бесконечное подмножество континуума является либо счётным - имеет мощность множества целых чисел, либо континуальным – имеет мощность множества вещественных числе».

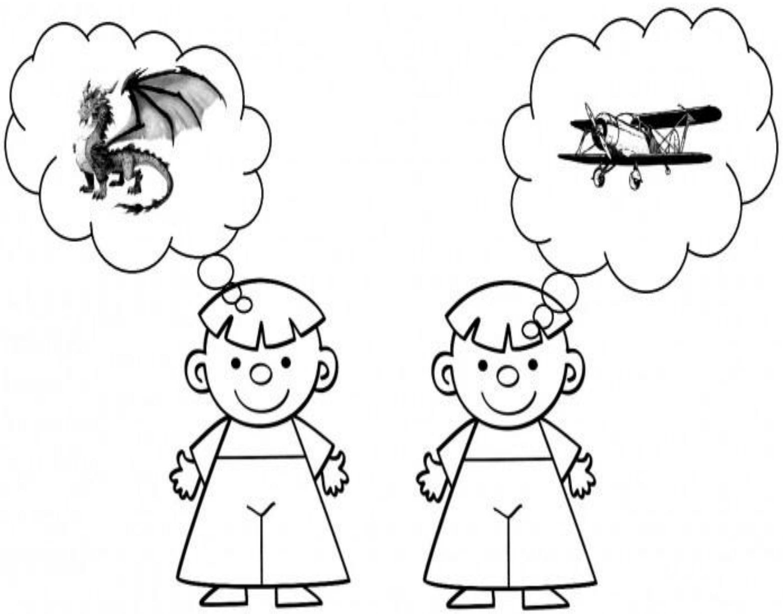
Вторая фундаментальная проблема КН

Вторая проблема:

Вычислимы или нет когнитивные функции ?

Эта проблема отражение второй проблемы Гильберта, которая звучит так: **противоречивы или нет аксиомы арифметики?** Курт Гёдель доказал, что непротиворечивость аксиом арифметики нельзя доказать, исходя из самих аксиом арифметики (если только арифметика не является на самом деле противоречивой).

Третья фундаментальная проблема КН



Третья проблема:

- Можно ли вычислить воображение и эмоции на программируемом компьютере
- можно ли заменить логический вывод на основе аксиом эмпирическим вычислительным процессом, на который потенциально могут повлиять ошибки в компьютерной программе
- Может ли результат проводимых вычислений изменить архитектуру и компонентную базу компьютера

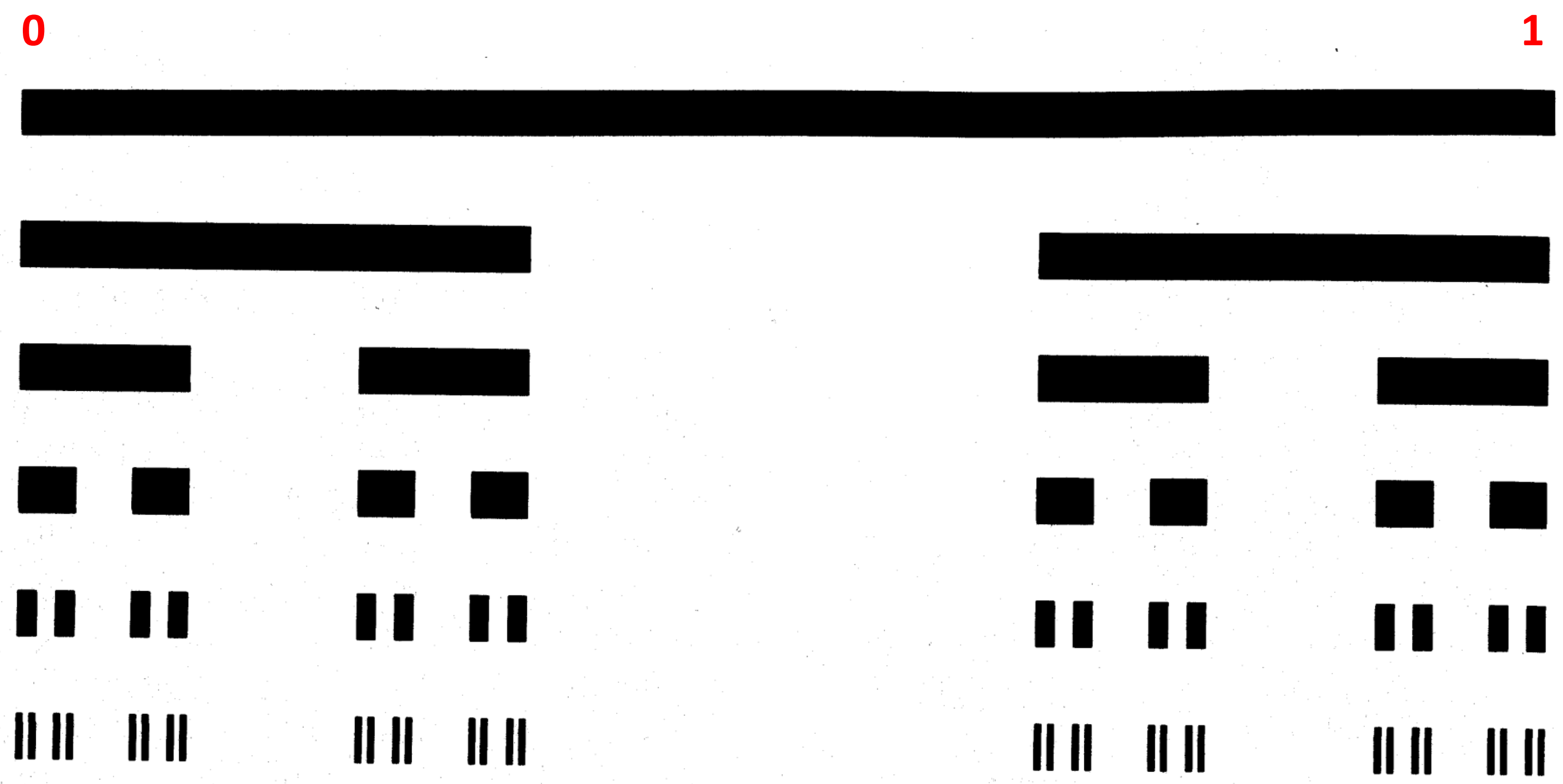
В каком то смысле подобна 10 проблеме Гильберта: Найти алгоритм, чтобы определить, имеет ли данное полиномиальное диофантово уравнение с целыми коэффициентами целочисленное решение. Из теоремы Матиясевича (1970) следует, что такого алгоритма не существует.

Парадоксы КН – «черные дыры» математики

- **Актуальная бесконечность**: отрезок [0,1] является конечным объектом, поглощающим «бесконечно развертывающийся процесс». Суть всех математических парадоксов – сведение «состоявшейся бесконечного» к «конечному» . Бесконечные множества X, Y равномощны, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.
  - Множество действительных числе отрезка [0,1] несчетно.
  - Квадрат и отрезок равномощны: Точки квадрата [0,1]x[0,1] с координатами $x=0,a_1a_2\ldots$, $y=0,b_1b_2\ldots$ сопоставляются точкам отрезка [0,1] $z=0,a_1b_1a_2b_2\ldots$

  (разные точки отрезка, например, 0,11; 0, 100909; 0,01909 переходят в одну и ту же точку квадрата {0,1; 0,1}.
- Отобразить отрезок [0;1,1] в отрезок [0;1] используем функцию ->f(x)=x/1,1

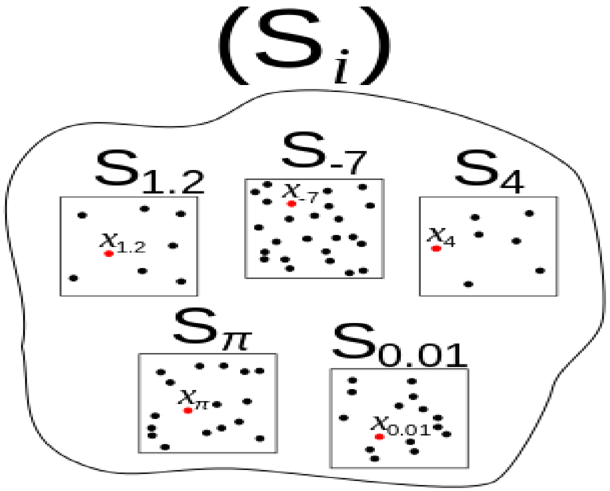
Канторово множество – суть самоподобия любого континуума

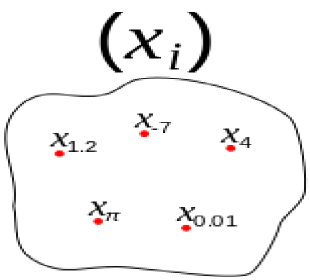


Имеем: 1/3 + 2/9 +4/27 + … =1. Из отрезка или континуального множества [0,1] «выбросили» всю «длину» и …. получили множество С - пересечение замкнутых множества, которое равномощно континууму, потому, что С не счетно !!! Поэтому множество С можно непрерывно отобразить на [0,1].

Между счетным и континуальным множеством нет «промежутка».

Аксиома выбора





Пояснения. (Si) семейство непустых множеств, проиндексированных множеством действительных чисел R.

Для каждого действительного числа i существует множество Si. На рисунке приведен пример выбора элементов множеств.

Каждое такое множество Si непусто, а возможно и бесконечно.

Аксиома выбора позволяет нам произвольно выбирать один элемент из каждого множества, формируя соответствующее семейство элементов (xi), также проиндексированных множеством действительных чисел R, где xi выбраны из Si.

Формулировка: Для всякого семейства X непустых множеств существует функция f, которая каждому множеству семейства сопоставляет один из элементов этого множества. Функция f называется функцией выбора для заданного семейства.

Итак, с помощью аксиомы выбора можно строить неизмеримые множества , т. е. наборы точек, которые **не имеют объема в обычном смысле** и построение которых требует **бесчисленного количества вариантов** выбора.

Следствия-парадоксы из аксиомы

- **Брадобрей**. Вождь повелел, чтобы единственный брадобрей деревни брил тех и только тех мужчин, которые не бреются сами. Должен ли он брить себя?

- **Каталог**. Библиотека решила составить библиографический каталог, в который входят те и только те каталоги, которые не включают себя. Включает ли такой каталог себя?
- Кантор. Нельзя задавать множества произвольными **словосочетаниями**, то есть не любое свойство должно определять множество, например, сюда относится понятие “множество всех множеств”.
- Борьба с парадоксами, предложенная Кантором: Разрешается работать с множествами, которые “встречаются в природе” или получаются из них “разумными” теоретико-множественными операциями.

Парадокс Банаха-Тарского

X Y

Ввиду своей неправдоподобности, этот парадокс часто используется как довод против принятия аксиомы выбора, которая существенно используется при построении такого разбиения.

Суть парадокса заключается в том, что в трёхмерном пространстве существуют неизмеримые множества, которые не имеют объёма, если под объёмом мы понимаем то, что обладает свойством аддитивности. Говорят, что множество X парадоксально разложимо на множество Y.

Парадокс удвоения шара (1926) - трёхмерный шар равносоставлен двум своим копиям.

Определение: два подмножества евклидова пространства называются равносоставленными, если одно можно разбить на конечное число «кусков» и составить из них второе. При этом для удвоения шара достаточно пяти кусков, но четырёх недостаточно.

Но … нас не удивляет, что функция y=2*x позволяет передвигать точки отрезка [0,1] так, чтобы получился отрезок [0,2]

Очевидно, что «куски» в таком «разрезании» шара не могут быть измеримыми (и … невозможно осуществить такое разбиение какими-либо средствами на практике).

Парадокс Банаха-Тарского (2)

Вопрос: можно ли используя парадокс сократить хранимый объем данных (обратный парадокс) ?

Для того, чтобы **что-то** сделать нужен 1) «объект» и … 2) «инструмент». В виртуальном мире **объектом** является информация, а **инструментом** — компьютер.

При копировании цифрового **объекта** числовой код копии может быть такой же как у самого объекта, но адреса хранения ячеек памяти – у объекта и копии разные, следовательно копия – это именно клон, а не тот же самый объект.

Итак, твердый шар в 3-мерном пространстве можно разложить на **конечное** число непересекающихся подмножеств (деталей), которые затем могут быть собраны так, чтобы получить две идентичные копии исходного шара. Процесс **сборки** включает в себя только перемещение и вращение деталей без изменения их формы. Однако сами по себе детали - это не «твердые тела» в обычном понимании, а **бесконечные** множества точек. В результате **сборка** деталей воспроизводит шар, который отличается от объема, который был в начале.

Парадоксы функций - Разрывные линейные функции

Линейная функция обычно определяется следующим свойством

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (*)$$

Если $f(x)=k*x$, то из уравнения следует $f(p*x) = p*f(x)$ для любого целого p.

Для $z=p*x$ имеем $f(p/q*z)=p/q*f(z)$

или $f(p/q)=f(1)*p/q$,

откуда $f(x)=k*x$

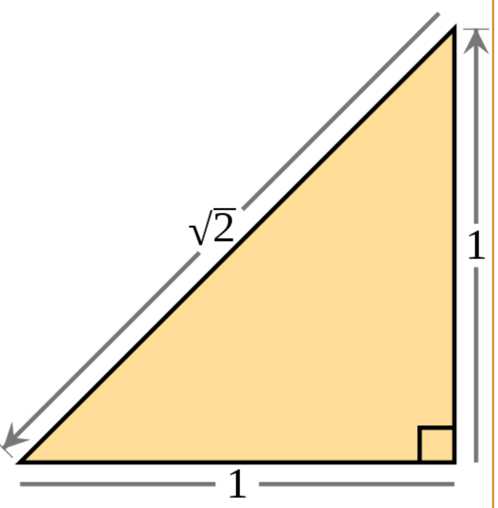
Аксиома выбора позволяет … найти другое решение. Понятие базиса Гамеля – $\{e_1, e_2, \ldots e_n \ldots\}$ -> $x=\mathrm{sum}_i\ x_i*e_i$ Базис можно построить и в бесконечномерном случае. Если требовать «рациональность» координат, то действительная прямая становится бесконечномерным векторным пространством. Например, 3 и sqrt (2) линейно независимы, поскольку $m_1*3+m_2*\mathrm{sqrt}(2)=0$ невозможно при рациональном m_1

Выберем базисный вектор e_m=sqrt (5) или $e_m=1$, положим

$$f(x)=k*x_m$$

Эта функция удовлетворяет (*)

Конструктивные числа



- Основным понятием математики вообще является понятие числа. Проблема, состоит в том, что большинство разделов математики оперирует понятием действительного числа, которое не может быть получено через способность человека к счету.
- При конструктивном подходе к определению вещественного числа вещественные числа строят, исходим из того, что механически можно выполнять лишь операции с целыми числами.
- Под операциями понимаем операцию сложения, умножения на -1, а также сравнения двух целых чисел. Поскольку рациональное число представляет собой пару целых чисел (числитель/знаменатель), то эти же операции можно считать механическими и для рациональных чисел.
- Проблема в открытии несоизмеримости величин. С этого момента в математике потребовались числа, которые не вычисляются механически обозримыми. Согласно тезису Черча-Тьюринга любая интуитивно вычислимая функция может быть вычислена с помощью машины Тьюринга .

Мера и категория

- Меры Жордана, Бореля и Лебега
- Канторово множество ненулевой меры
- Измеримые функции

Метрические пространства

- Метрика и топология
- Объекты «бесконечной» размерности
- Принцип непрерывности

Теория вероятностей

- Сигма- алгебра
- Проблемы в основаниях теории вероятности
- Сходимость случайных величин

Алгоритмическая неразрешимость

- Алгоритмы и вычислимость
- Перечислимость и разрешимость
- Не формализуемость истины и не аксиоматизируемость арифметики