



История и методология математики и компьютерных наук

*«Теория вероятности — единственный математический
инструмент, помогающий составить карту
неизвестного»*

— Бенуа Мандельброт

«Фрактальная геометрия природы»

Лекция 7

**Проблемы сложности вычислительных проблем и
ошибок вычислений**

13 октября 2021 г.

- Привести примеры
 - трансляционных преобразований
 - счетного и не счетного множества

Что было на прошлой лекции

- Вычисления можно рассматривать как метод обработки информации с помощью программного автомата.
- Информационное описание объектов обладает предсказательной «силой», только если это описание толерантно к ошибкам и погрешностям количественной характеристики объектов
- Ошибки вычислений могут носить случайный, т.е. устранимый, а погрешности - методический (системный) характер

Тема лекции.

Ошибки и сложность вычислений

- **Ошибки** (погрешности) вычислений. Применяемый для компьютерного моделирования метод вычислений воспроизводит исходную математическую модель приближенно. Наиболее типичными погрешностями цифровых методов моделирования являются погрешность дискретизации и погрешность округления. Погрешности округления (абсолютная или относительная) имеют тенденцию накапливаться, а их величина определяется точностью представления чисел и чувствительностью алгоритма к погрешностям округления.
- **Сложность** вычислений. Определяется объем вычислительных ресурсов (времени и памяти), требуемой для решения вычислительной проблемы.
- **Проблема вычислимости.** Характеризация вычислительных задач (проблем), с точки зрения возможности их решения с использованием рекурсивных функций

Описание вычислительных проблем

- Вычислительные проблемы(задачи) можно рассматривать как набор пар: (экземпляр задачи - решение для данного экземпляра).
 - **Например:** экземпляр задачи — число, решение — строка «да», если это число простое и «нет»- в противном случае.
- Описанием **экземпляра** задачи является строка над выбранным алфавитом (чаще всего это бинарное множество $\{0,1\}$). Примеры:
 - **Задача распознавания**, ответом на которую является либо "да" или "нет". Например, экземпляр задачи - описание графа, решение - связан ли данный граф или нет.
 - **Задачей поиска**, в которой ответ не сводится только к двум исходам «да» или «нет», но задачу поиска можно сформулировать и как задачу распознавания. Например, задача поиска результата «умножения двух чисел A и B » можно сформулировать как задачу распознавания отношения $A*B=C$

Понятие сложности вычислений

Понятие сложности вычислений возникла из потребности **сравнивать** быстродействие алгоритмов и **описывать** их свойства (время исполнения, объём необходимой памяти и т.д.) в зависимости от **размера входа и выхода**. Это понятие включает:

- **Количество** вычислительных операций, затраченных алгоритмом для решения конкретного экземпляра задачи, зависит не только от размера входных данных, но и **от самих данных**.
- Сложность алгоритма как **функция размера входных и выходных данных**, равная максимальному количеству элементарных операций, выполняемых алгоритмом для решения экземпляра задачи указанного размера.

В задачах, где размер выхода не превосходит или пропорционален размеру входа, временная сложность - функция размера **только входных данных**.

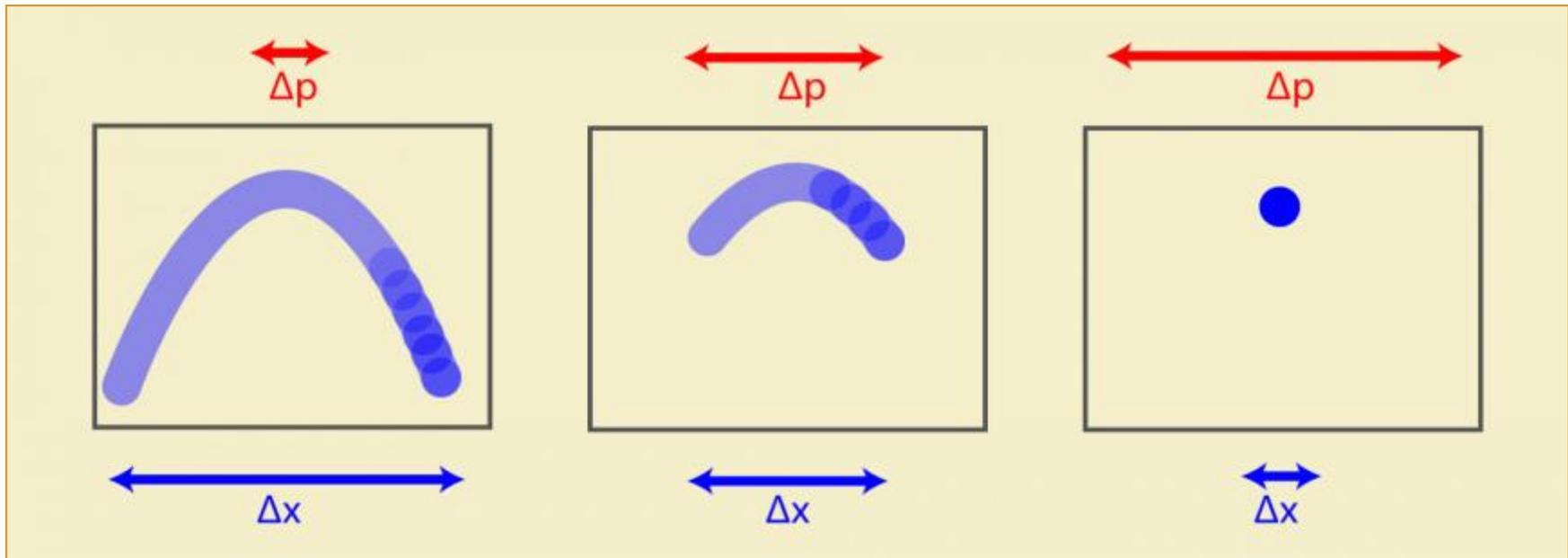
Вычислительная сложность и точность: всегда ли неопределенность недостаток ?

Все, что мы знаем о окружающем нас мире, мы знаем с разной степенью неопределенности.

Согласно известному из квантовой механике принципу неопределенности, чем точнее мы будем фиксировать координату объекта в пространстве-времени, тем меньше информации мы сможем получить о его импульсе

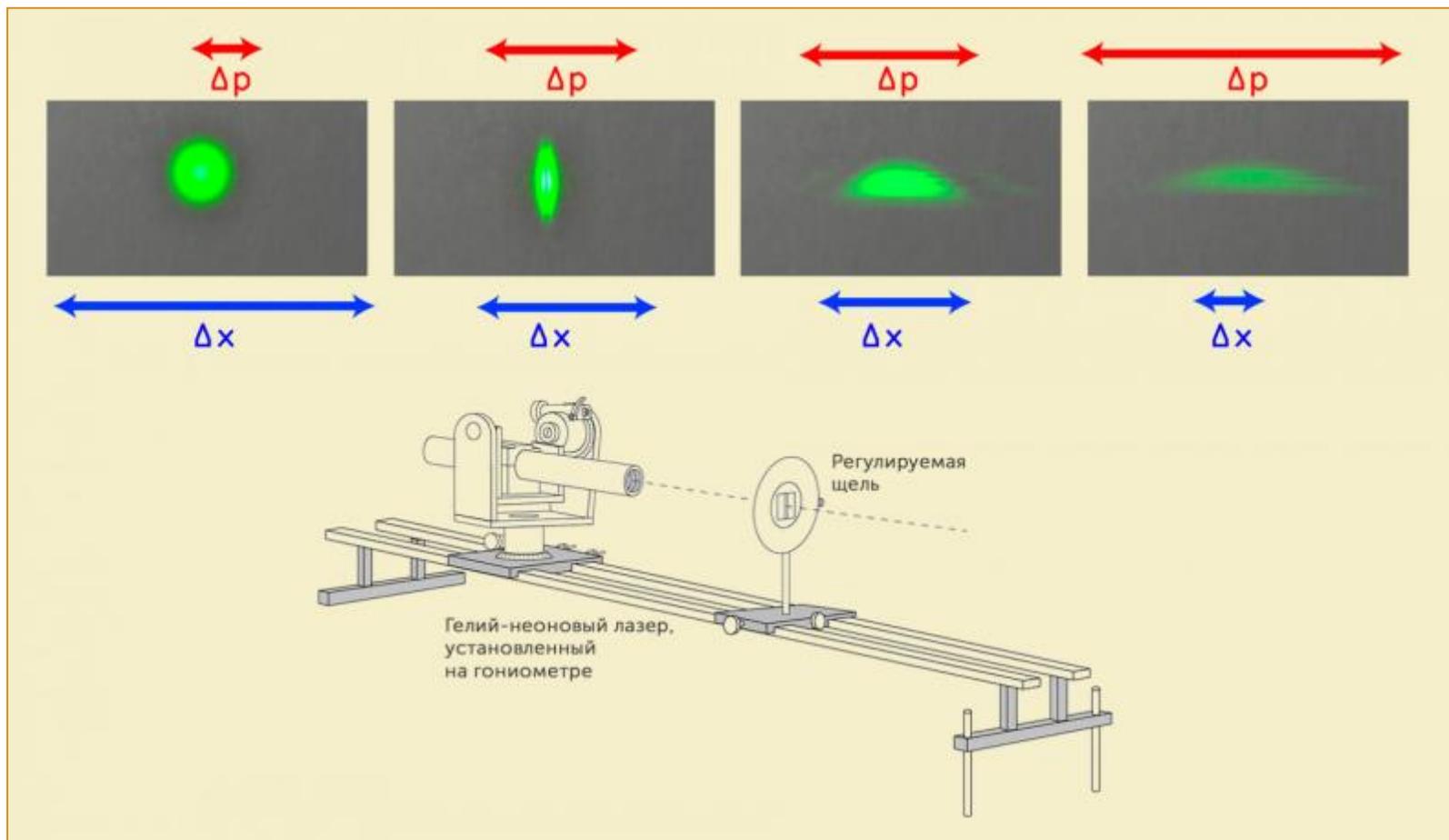
- Пример из физики: подброшенный вверх мячик, фотографируют несколько фотографов, у каждого на фотоаппарате стоит разная выдержка. Если выдержка большая, то на фотографии положение мяча получится смазанным, но зато будет хорошо виден вектор его движения.
- Пример из компьютерных наук: отношение «время вычислений - разрядность чисел». Если движение тела рассчитывать на компьютере по формуле Ньютона, то и координата и скорость имеют точность выбранной модели ?

Пример



Три альтернативных снимка движущегося объекта, слева направо, показано как с увеличением пространственно-временного интервала (выдержки фотоаппарата), уменьшается количество информации об импульсе (траектории частицы).

Пример



интерференционные картины получаемые при последовательном уменьшении щели, источник. схема экспериментальной установки

Пример. Интерференция волн на воде

10



Слева: интерференция волн на воде.

Справа: интерференционная картина, полученная в результате регистрации одиночных электронов, проходящих через двойную щель.

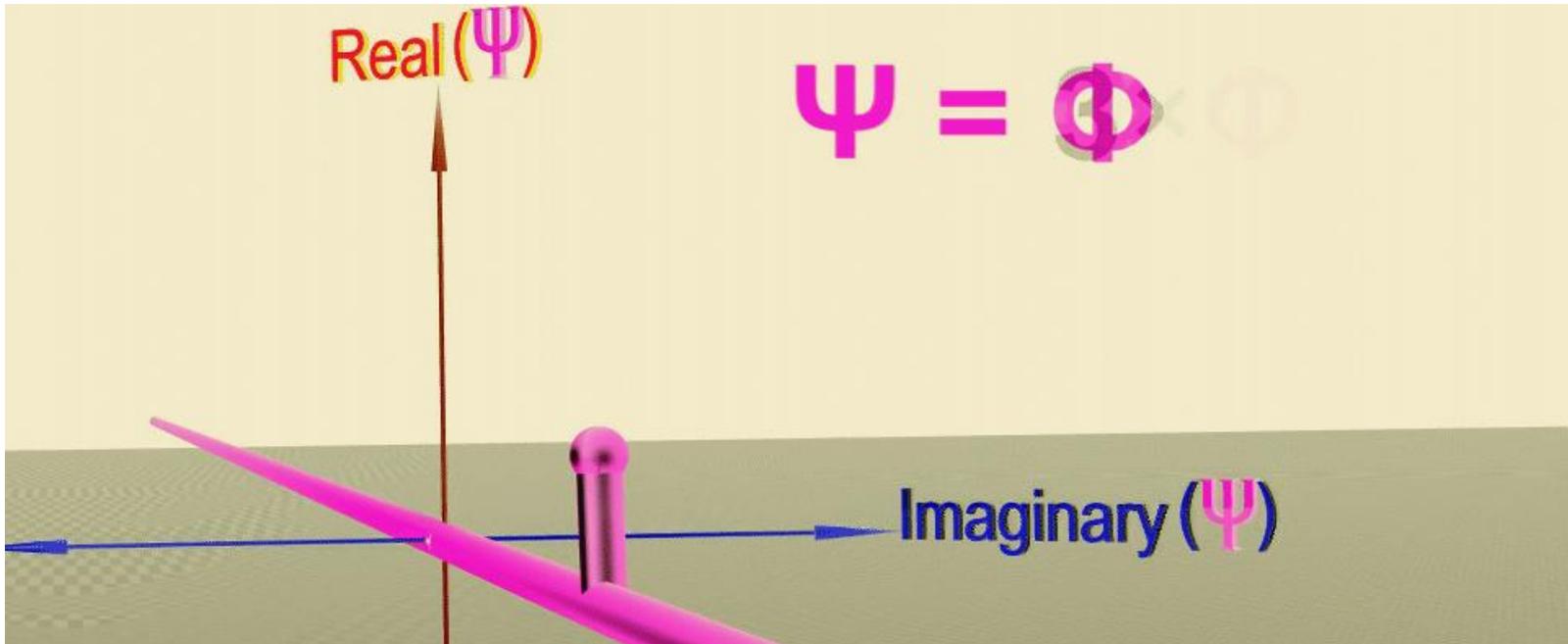
Пример. Демонстрация принципа интерференции волн



Слева: конструктивная интерференция — встреча пиков волн совпадающей фазе даёт более высокую результирующую амплитуду.
Справа: деструктивная интерференция при встрече пиков волн в противоположной фазе.

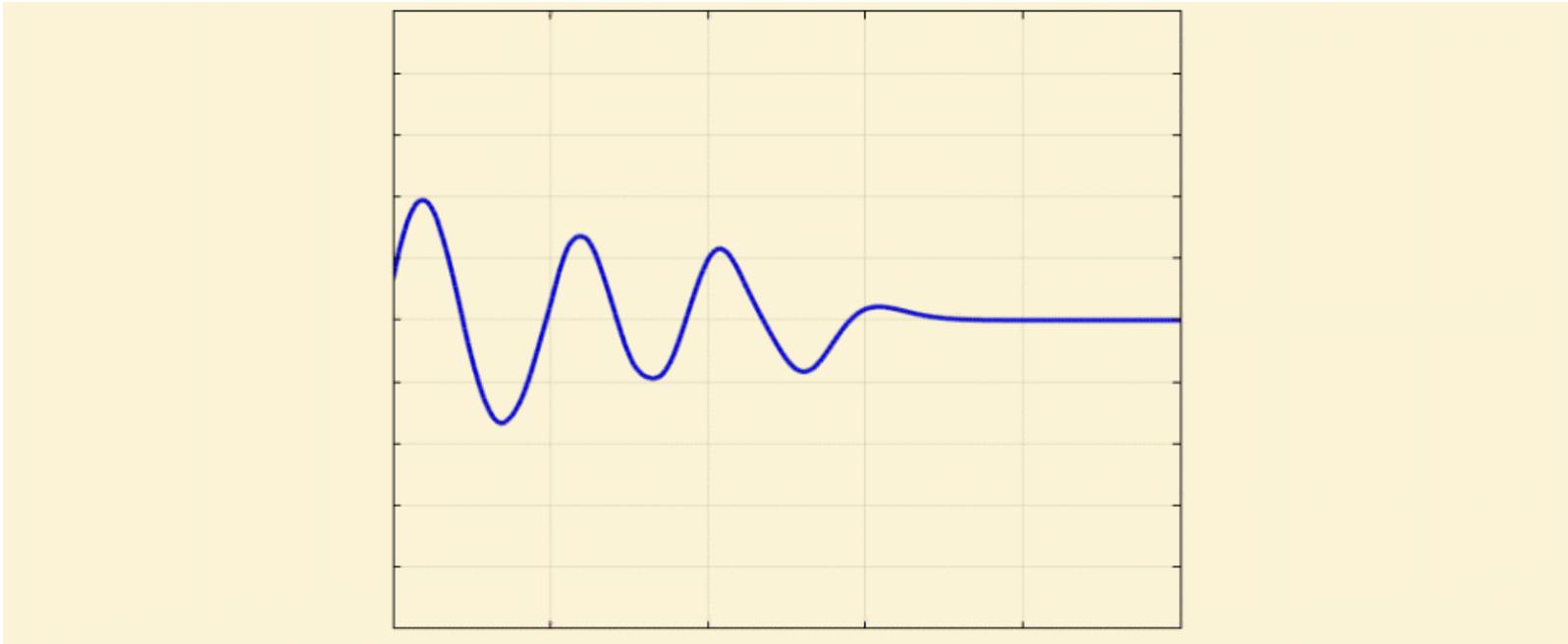
Пример. Анимация последовательных преобразований

12



Анимация последовательных преобразований, которые позволяют получить волновую функцию как сумму амплитуд вероятности в точках на пути частицы (зеленая линия), сначала задается вещественная часть амплитуды, а затем фаза (угол поворота) в комплексной плоскости.

Пример. образования узлов интерференции



Пример образования узлов интерференции (красные точки) в одномерной стоячей волне

Проблема сложности с точки зрения компьютерных наук

- Теория сложности, наряду с теорией вычислимости и теорией формальных языков, является одной из трех основных областей компьютерных наук
- Все проблемы выражается словом в алфавите. Задача состоит в решении проблемы слова, то есть в решении для данного слова, принадлежит ли оно к языку или нет

Модели машин в теории сложности -

- « Класс функций, вычисляемых по Тьюрингу, соответствует классу интуитивно вычисляемых функций». -

эквивалентность лямбда-исчисления Черча машине Тьюринга. -

- **Класс P**
- Класс P вмещает все те проблемы, решение которых считается «быстрым», то есть время решения которых полиномиально зависит от размера входа. Сюда относится сортировка, поиск в массиве, выяснение связности графов и многие другие.

.

- **Класс NP**
- **Класс NP** содержит задачи, которые недетерминированная машина Тьюринга в состоянии решить за полиномиальное количество шагов от размера входных данных. Их решение может быть проверено детерминированной машиной Тьюринга за полиномиальное количество шагов. Недетерминированная машина Тьюринга является лишь абстрактной моделью, в то время как современные компьютеры соответствуют детерминированной машине Тьюринга с ограниченной памятью. Поскольку детерминированная машина Тьюринга может рассматриваться как специальный случай недетерминированной машины Тьюринга, класс NP включает в себя класс P, а также некоторые проблемы, для решения которых известны лишь алгоритмы, экспоненциально зависящие от размера входа (то есть неэффективные для больших входов). В класс NP входят многие знаменитые проблемы, такие как задача коммивояжера, задача

Проблема останова

- Тьюринг: проблема останова алгоритмически не разрешима .
Результат играет фундаментальную роль в теории предсказуемости . -

Выводы: Математический объект – абстракция от абстракции

- Математический объект – количественная характеристика множества предметов
- Число – абстракция от исходной абстракции (все «пятерки» – число 5)
- Формула – абстракция от числа

Подходы к формализации : от теории множеств к теории категорий

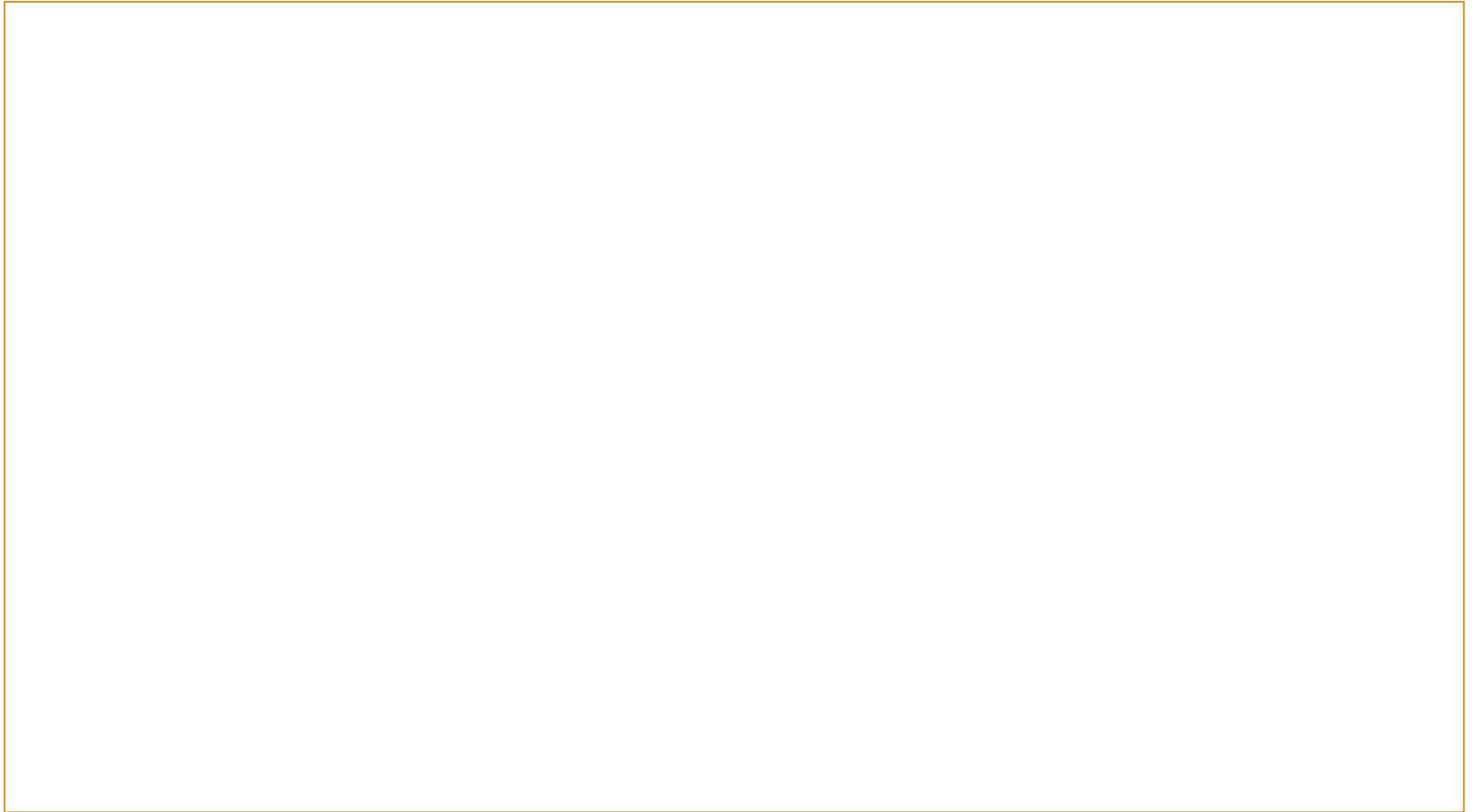


Проблема – «проклятие размерности»



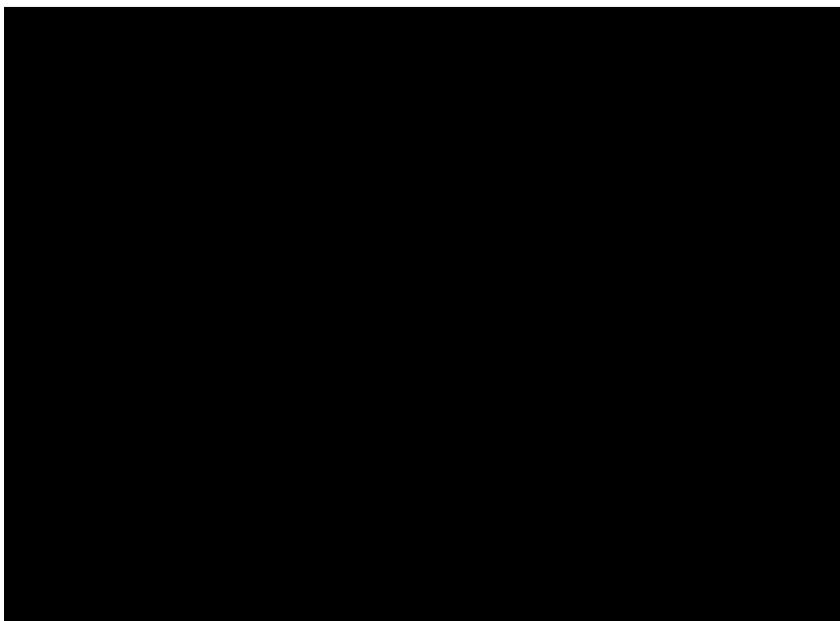
Проблема – регуляризация решений обратных задач в базисе функторов

О чем лекция



Слово – число: случайность – закономерность или сложность ?

22



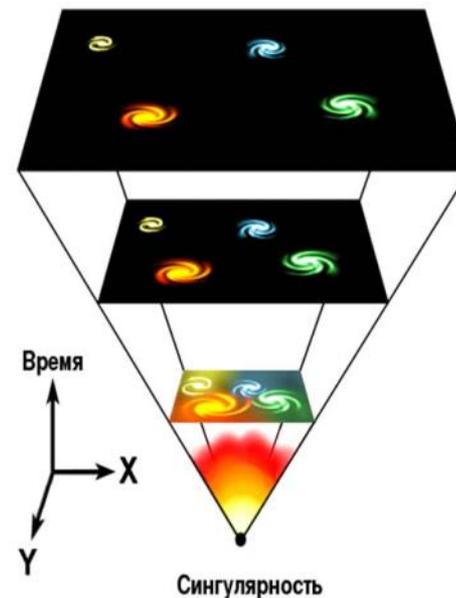
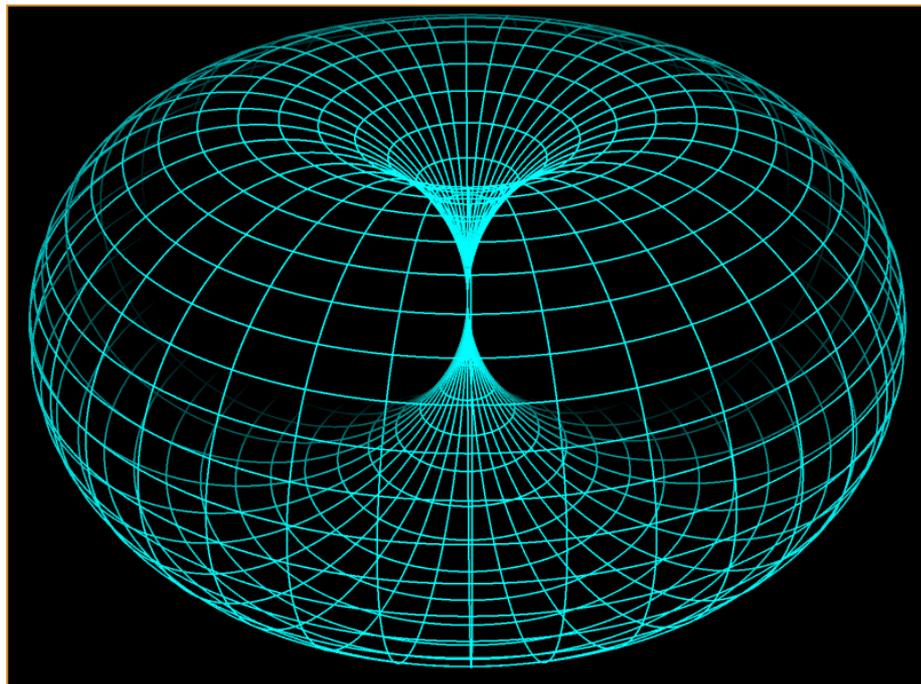
Случайные события «дискретны» и просты
– процесс Пуассона



Процесс со случайными (не рациональными) взаимодействием непредсказуемы

Случайность и сингулярность

Сингулярности – точка пространства или событие, в которой однородные объекты (процессы) радикально изменяют свои свойства, другими словами, количественные изменения приводят к качественным сдвигам. Сингулярность часто связывают с проявлением случайности, потому что, как правило, либо причины, либо их следствия недостаточно хорошо известны.



Сингулярности «рациональных» решений как источники «ошибок», связанных с использованием формальных критериев

Считается: что если задача имеет рациональное алгоритмическое решение, то это решение характеризует процесс увеличения некоторых **формальных** показателей, отражающих то или иное **предпочтение** пользователя.

- Однако, для многих прикладных задач сформулировать в явном виде критерии **предпочтения** в **формальном** виде нет возможности, **судить о свойствах получаемых решений на основе формальных критериев** – задач экспоненциальной **сложности**.
- При этом могут образовываться **«циклы предпочтения»**, которые можно рассматривать как **источник «ошибок» (нерациональности)** принимаемых решений.

.

Пространства возможностей для поиска решений с использованием вычислительных систем

Что есть:

- Решение прямых задач - нахождение point to point соответствия
- Решение обратных задач – нахождение set to point соответствия
- Решение задач соответствия – нахождение set to set соответствия

В чем суть проблемы:

разрыве между конструкцией современных вычислителей и их производительностью при решении конкретных задач (наборов данных)

Какие методы существуют для решения задач:

- алгоритмизация процесса получения решений
- регуляризация (сужение пространства возможных решений)
- рандомизация (расширение пространства возможных решений) и вычисления с оракулом

Информация : классическая и квантовая трактовка

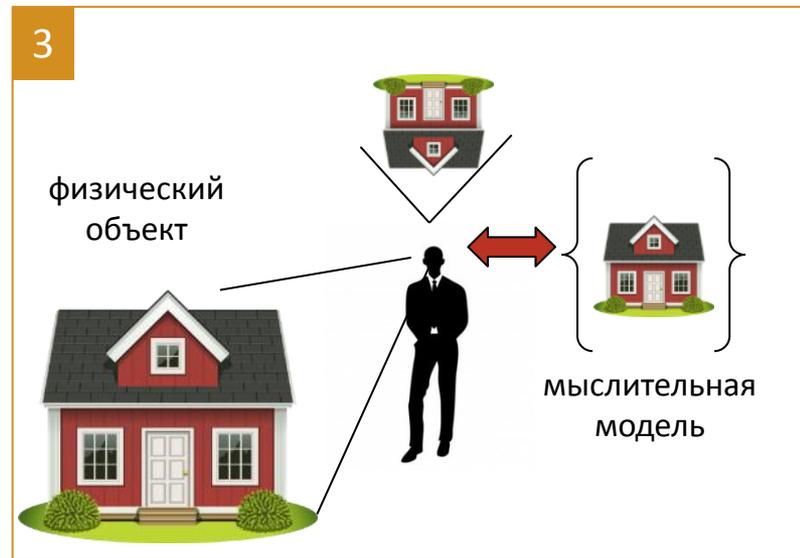
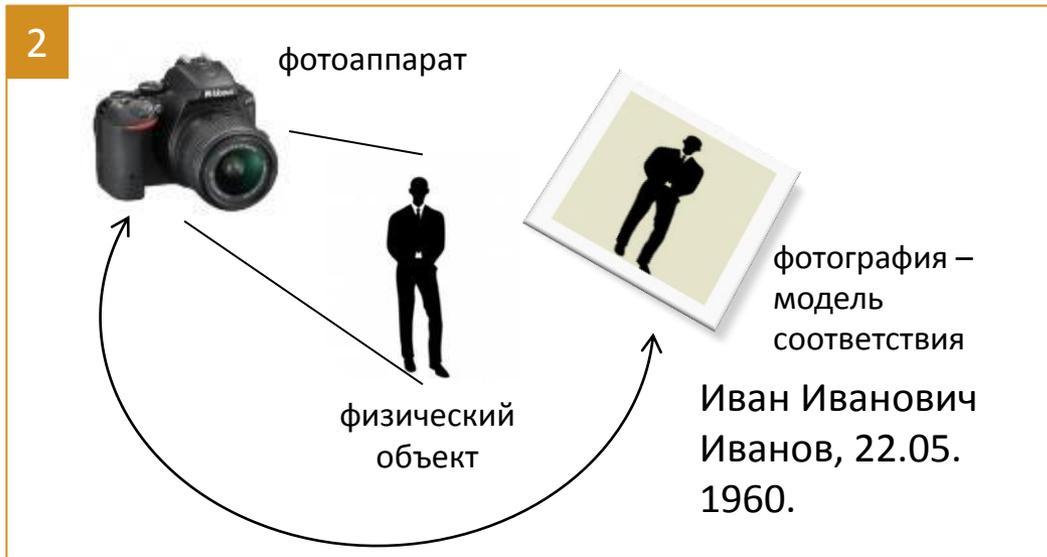
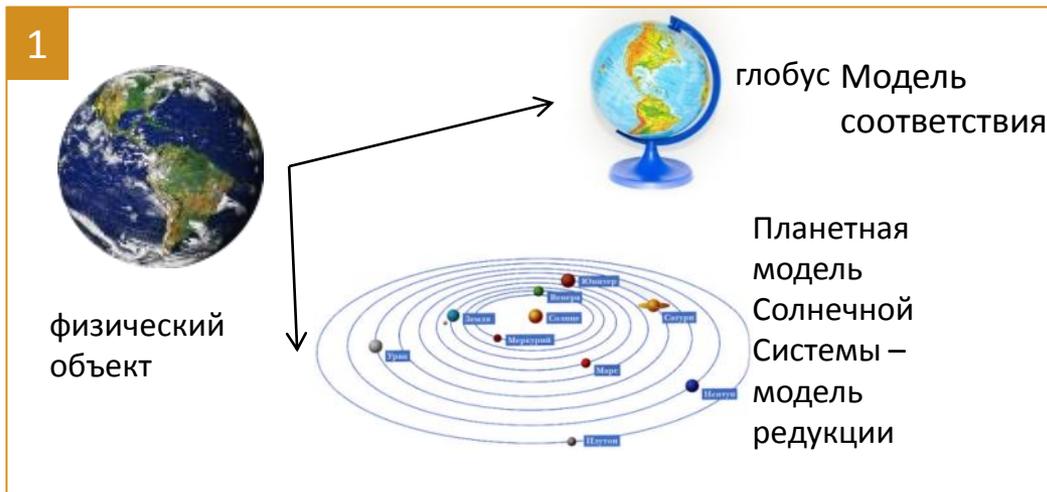
Классические (неквантовые) представления о вероятности исходят из того, что случайность является «ненастоящей» (субъективной). Все состояния независимы.



Измерение просто проявляет то, что было ранее скрыто (кубик имел определенное «состояние» и до того как его вынули из урны). Хотя кубики существуют «сепарабельно» , т.е. независимо друг от друга, но некоторые их свойства «спутаны», например, суммарное число граней или средний «выигрыш».

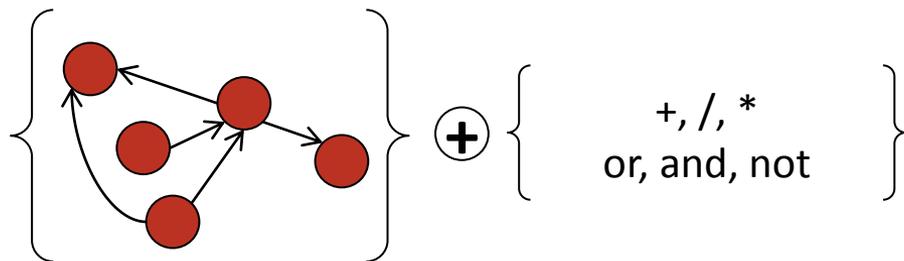
Спутанность проявляется в вероятностном или информационном пространстве состояний.

Воспринимаемая сознанием объективная реальность наделяется квантовыми свойствами:

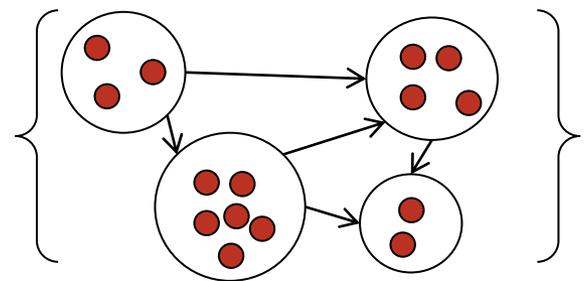


Вычисления как метод обработки информации

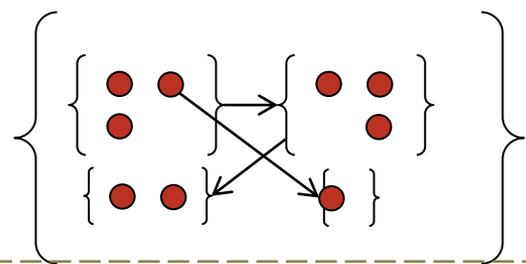
1 Физический мир – это логико-алгебраическая система: множество объектов и операций над объектами, которые детерминировано связаны



2 Физический мир – это частичная алгебраическая система: совокупность подмножеств. Внутри подмножеств действуют свои операции. Модель строится с помощью операций над wybranymi подмножествами, но процессы между множествами описываются вероятностными законами.



3 Физический мир – объединение «малых» алгебраических подсистем и мета-операций. Внутри «малых» подсистем объекты неразличимы, а операции взаимодействия спонтанные (сингулярны).



партитура



музыкант



инструмент



звуки музыки



слушали

«Запутывание» квантового объекта с состоянием «СИЛОВОГО ПОЛЯ».



Запутывание – это проявление неоднородности, появления случайности и, как следствие, фактора «информационности»

Что может объяснить «информационный» подход

- Ограничения на симметрию Вселенной и физические преобразования определяют физические законы сохранения: энергии, импульса, момента импульса, заряда, а также характеристики возникающих при расширении Вселенной частиц и полей.
- Неоднородности (информация) порождают различные типы взаимодействия, частицы и соответствующие им поля, атомы, молекулы, галактики, звезды, планеты, а также ... жизнь,...

Физические следствия «информационной простоты»

- реализуемость трансляционного преобразования времени означает **однородность времени**.
- реализуемость трансляционного преобразования пространства означает **однородность пространства**.
- реализуемость преобразования вращения пространства означает его **изотропность** (т.е. связь между элементами пространства не зависит от выбранного направления).

Следствия «информационной сложности»

- Сочетание классического сложения вероятностей различных **альтернатив** с классическим выбором одного из нескольких равновероятных путей приводит к «волновому» правилу сложения амплитуд вероятностей.
- Тензорное произведение амплитуд вероятностей определяет принципиально новое состояние – так называемую суперпозицию несовместных состояний объекта. Согласно «закону исключенного третьего» одновременное пребывание в несовместных состояний в мире физической реальности запрещено. Суперпозиция возможных состояний является информационной, а не физической характеристикой системы.
- Информационная мера или «неопределенность» вычисляется как функционал от волновой функции объекта.

Ответ первого приближения

- **Вспомним:** теорема Лёвенгейма — Скулема утверждает: Если множество предложений, которые выражаются **в счётном языке**, имеет бесконечную модель, то такое множество имеет и счётную модель.
- **итак:** Одно и то же множество может быть в одной модели счётным, а в другой - несчётным, просто из-за того, что ни одно из взаимно однозначных отображений этого множества на натуральный ряд во вторую модель не попало.

Итак, истинно только приближенное описание !?

- Как ни парадоксально, но именно абстракции и отношения (например, теорема Пифагора), приближенно выполняемые в реальности, позволяют достичь ясного понимания свойств Природы.
- Математическое описание обладает предсказательной силой, только если оно толерантно (робастно) к неточностям количественного описания рассматриваемых объектов реальности.

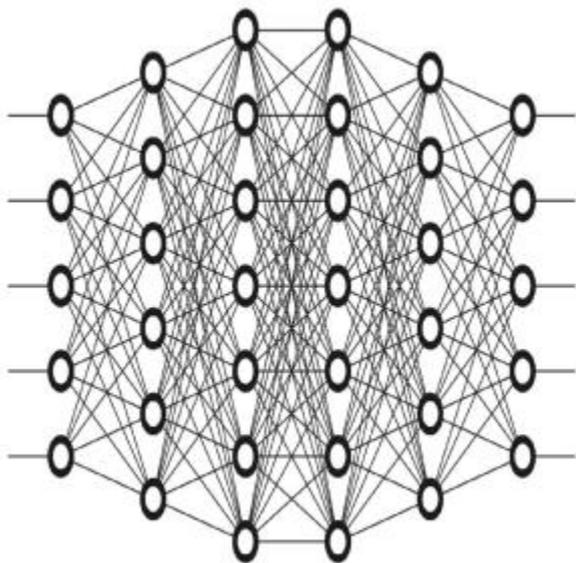
Новый инструментарий формализации реальности: от теория множеств к теории категорий

- В рамках теории множеств считается, что любой объект исследований должен принадлежать некоторому множеству. При выполнении операций с объектами несущее множество не меняется.
- В теории категорий **преобразования** объектов (объекты – аналоги множеств, преобразования – аналоги отображений) входят в аксиоматическое определение наравне с объектами. В итоге объекты оказываются предельным случаем (результатом) преобразований. Предметом исследования становятся совокупности способов преобразований объектов, т.е. процессы.

Множества vs категории

- категории являются гибким «шаблоном», с уже готовыми конструкциями и теоремами, по которому можно строить самые разные физические теории

Нахождение решений в «пространстве возможностей» нейронной сети



Завершения процесса обучения оцениваться на основе анализа структуры аттрактора вектора состояний слоев нейронной сети

