



История и методология математики и компьютерных наук

Санкт-Петербургский
Государственный
Политехнический
Университет

Институт прикладной
математики и механики

Лекция 6

**... ПОТОМУ ЧТО ВСЕ ОТТЕНКИ СМЫСЛА
умное ЧИСЛО передает.**

Н. Гумилев

*(стихотворение «Слово»,
1919 г. Петроград)*

6, 13 октября 2021 г.

- 100.500 – IP адрес (это код адреса или ...сам адрес?) .
- Мера множество Кантора для случая не $1/3$, а $1/5$
- Задать «разумный вопрос»

Что было на прошлой лекции

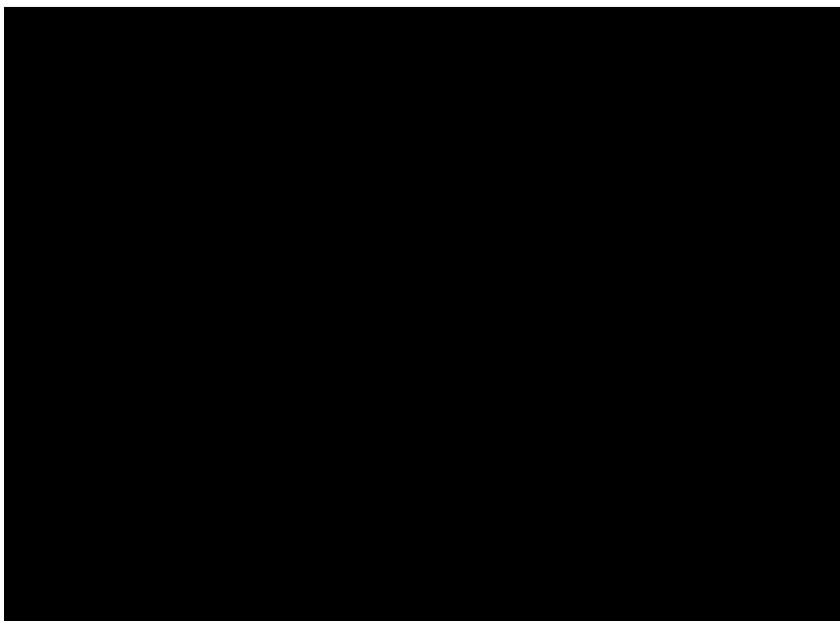
- Концептуальная проблема компьютерных наук: **устойчивость «рациональных» решений к ошибкам** – почему невозможно разработать «сложную» программу без ошибок.
- Фундаментальная проблема «вычисления» понятий алгоритмически не разрешима
- Частичная «рациональность» - теорема Лёвенгейма-Скулема: любая теория не более, чем счётной сигнатуры, имеет **элементарную счетную подмодель**». Аксиоматическая теория не может быть категорична - всегда найдётся интерпретация (объяснение), совершенно не похожая на ту, ради которой эта теория создавалась.
- Ответ, который мы получаем, используя формальную полную теории, логически выводим. В реальности, ответ «Природы» зависит от того, какой вопрос мы ставим, какой эксперимент мы проводим, какой регистрирующий прибор мы выбираем. При этом, спрашивающий неизбежно вовлекаем в то, что оказывается происходящим.
- **Умберто Матурана:** Познать можно лишь то, что логически доказуемо....или вычислимо (имеется алгоритм или код вычислений).

О чем лекция

- Неопределенность и сингулярность вычислительных процессов и результатов информационного взаимодействия:
 - математика изучает взаимосвязь языка и мышления,
 - компьютерные науки (+физика) – отношения языка и реальности.
 - Связь естественных наук в наличии языка – синтаксической конструкции.

Проблема: Слово – число; случайность – закономерность;
истинность - доказательство

5



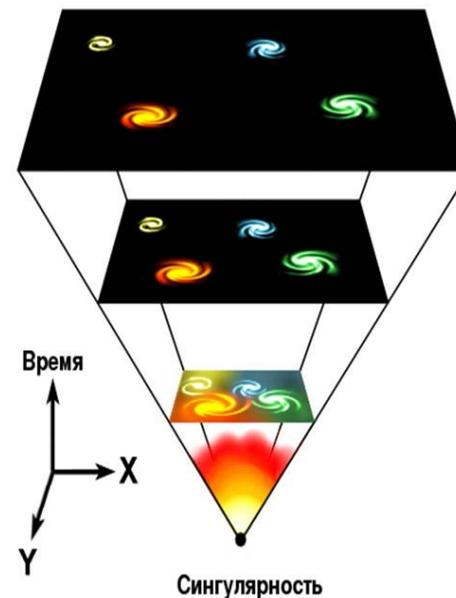
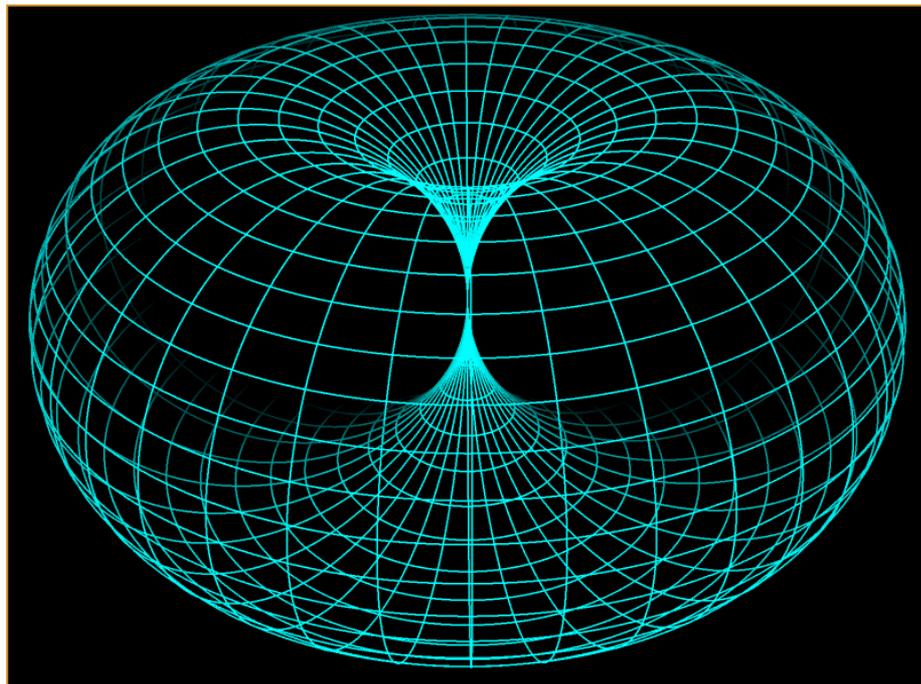
Случайные события «дискретны» и просты
– процесс Пуассона

Процесс со случайными (не
рациональными) взаимодействием
непредсказуемы



Случайность и математическая сингулярность

Сингулярности – точка пространства или событие, в которой однородные объекты (процессы) радикально изменяют свои свойства, другими словами, количественные изменения приводят к качественным сдвигам. Сингулярность связывают с проявлением случайности, потому что, как правило, либо **причины**, либо их **следствия** недостаточно хорошо известны – являются неопределенными.



$$A/0 = \infty$$

Существование «рациональных» решений как источники «ошибок», связанных недоказуемостью истины

Считается: что если задача имеет рациональное алгоритмическое решение, то это решение характеризует процесс увеличения некоторых **формальных** показателей, отражающих то или иное представление об истинности (Ахиллес не догонит черепаху, парадокс Зенона...)

- Однако, для многих прикладных задач сформулировать в явном виде критерии **истинности** в **формальном** виде нет возможности, **судить о свойствах получаемых решений на основе формальных критериев** – задач экспоненциальной **сложности**.
- При этом могут образовываться «**циклы предпочтения**», которые можно рассматривать как **источник «ошибок» (нерациональности)** принимаемых решений.

.

Пространства возможностей поиска решений с использованием вычислительных систем

Что есть:

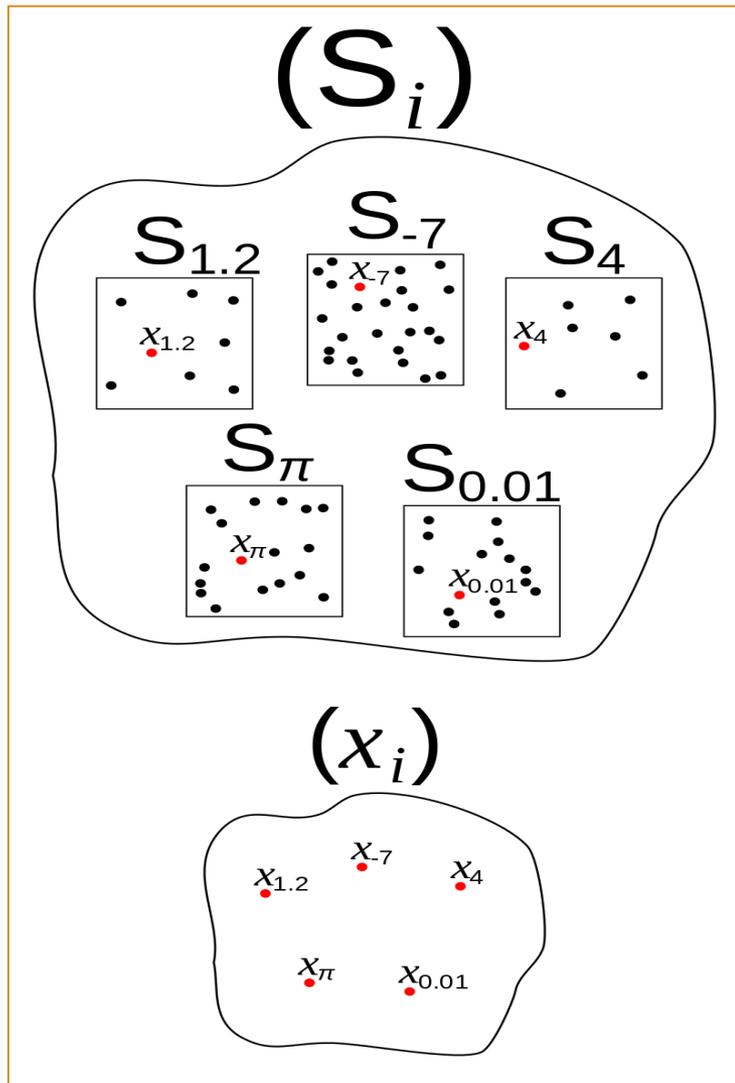
- Решение прямых задач - нахождение **point to point** соответствия
- Решение обратных задач – нахождение **set to point** соответствия
- Решение задач соответствия – нахождение **set to set** соответствия

В чем суть проблемы: Как выбрать «один элемент из множества» ???

Аксиома выбора

Для всякого семейства непустых множеств X существует функция f , которая каждому множеству семейства сопоставляет один элемент этого множества. Функция f – называется функцией выбора.

Пример



Где (S_i) семейство непустых множеств, проиндексированных множеством действительных чисел R .
 Для каждого действительного числа i существует множество S_i .

Пример выбора элементов множеств.

Каждое такое множество S_i непусто, а возможно и бесконечно. Аксиома выбора позволяет произвольно выбирать один элемент из каждого множества, формируя соответствующее семейство элементов (x_i) , также проиндексированных множеством действительных чисел R , где x_i выбраны из S_i .

Существует разрыв между конструкцией современных вычислителей и их возможностями решения конкретных задач (обработки наборов входных данных), например, при реализации алгоритма вычисления **функции выбора**

Фундаментальный вопрос - Какие методы существуют для решения формально (экстенционально) и содержательно (интенсионально) сформулированных задач:

- - алгоритмизация процесса получения решений
- - регуляризация (сужение пространства возможных решений)
- - рандомизация (расширение пространства возможных решений) и вычисления с оракулом

Проблема непротиворечивости vs обоснованности

- **1961** г. Дж. Лукас, показал, что согласно Второй теореме Гёделя (если формальная арифметика непротиворечива, то в ней невыводима некоторая формула, содержательно утверждающая непротиворечивость этой арифметики) человеческий ум принципиально превосходит возможности искусственного интеллекта.
- Итак, есть истинное, но не доказуемое формальное утверждение, а некоторые математические ошибки не влияют на истинность результата....
- Р. Пенроуз: в книге «Тени разума»идея непротиворечивости заменена обоснованности....
 - Первый аргумент - Геометрия это не математика, а физика
 - Второй аргумент - Обоснованность: истинно то, что доказательства.
Для машины важна непротиворечивость. А для человека – обоснованность.

Интерпретация vs объяснение

- Компьютер – мозг.....В чем принципиальная разница.
- Терема Геделя 1931 г. опирается на то, что в теории есть истина, которая не логически не доказуема... средствами самой теории
- Доказательство, эвристика... или стандартная интерпретация...Гедель: истина не достигается через расширение....аксиом, т.е. существует не принципиальная завершаемость процесса доказательств математики

Итак, формальный результат имеет множество интерпретаций и лишь одно контекстное обоснование

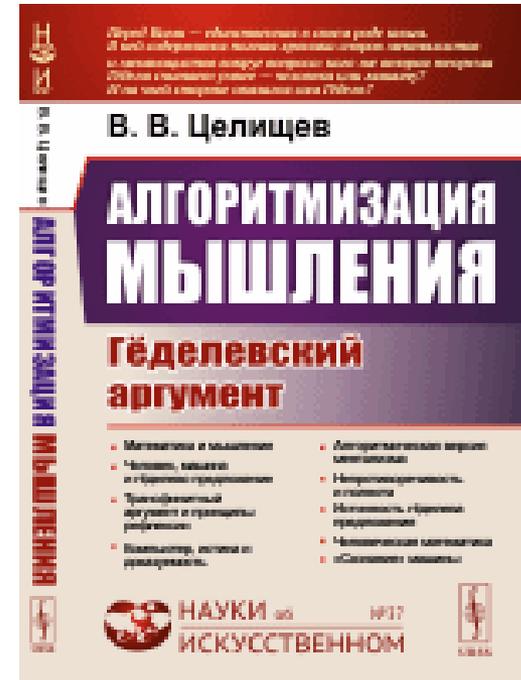
Дизъюнкция Геделя..

Суть: математической теории всего быть не может, и нельзя объединить множество доказуемых утверждений со множеством истинных. Проблема единственностине обоснована. Множественность – фундаментальна.

- Теорема 1 Геделя доказана в 1931 г. Утверждает, что есть формально неразрешимые проблемы, что делать ? **Но.... любое утверждение разрешимо человеческим умом....интуитивно**
- Этот аспект связан с тем, что называется ИИ.... Используемый в нейронных сетях «перебор данных² на основе логического вывода не есть интуиция...В какой степени мы должны полагаться на значимость математических результатов....Нужна ли формализация ?!
- Не обязательно математика важна для задач поиска истины... Интенциональность теоремы – как формально выразить непротиворечивость ... таких способов много, как мы выбираем эти способы ?!

Обязательны или математические формальные обоснования в поиске истины

- Виталий Валентинович Целищев



Математика и психология: что может ЕИ и ИИ

- Современная психология описывает естественный интеллект и когнитивную систему мозга как вычислительную систему. Состоит ли ЕИ из отдельных модулей, которые связаны «центральным процессором».
- Вопрос методологии – можем ли мы в терминах математики понять и объяснить психологию....
- Феномен креативности не алгоритмируем потому, что
 - Онтологический аргумент Геделя – вульгаризация аксиоматического подхода.... «нет абсолютной формулы счастья» потому, что в ней обязательно есть ошибка
 - Порождает ли формальная система новые знания ?
 - Может ли формальная система, например, ИИ, заниматься творчеством ... писать музыку, рисовать картины...

Информация : классическая и квантовая трактовка

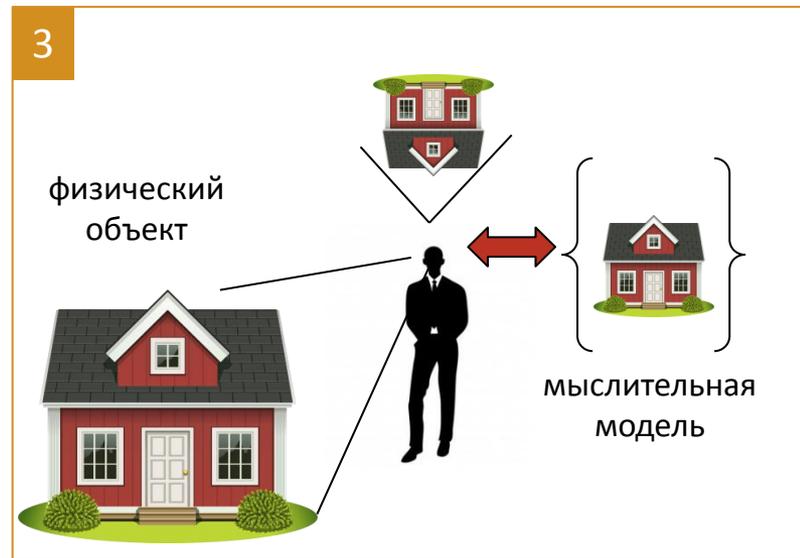
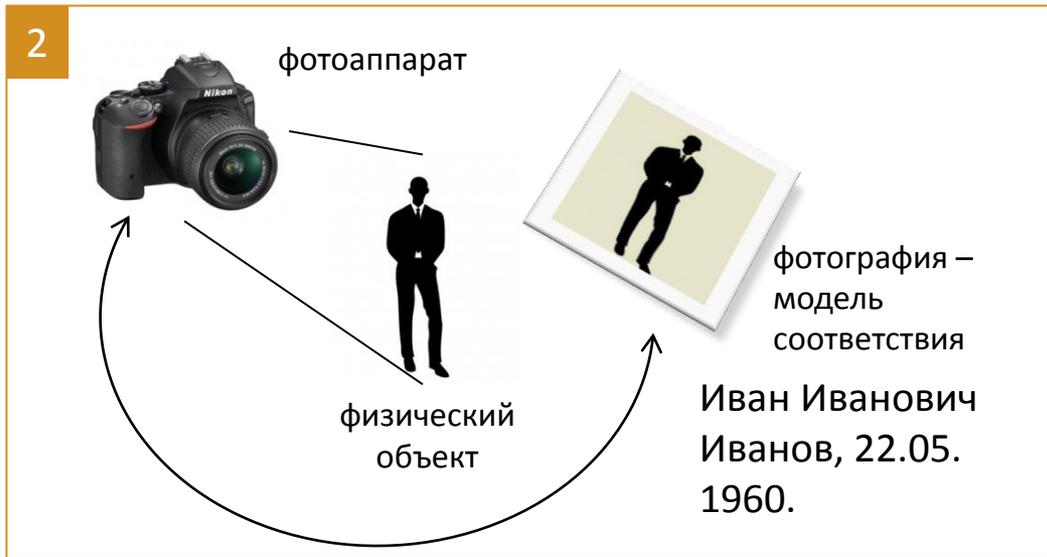
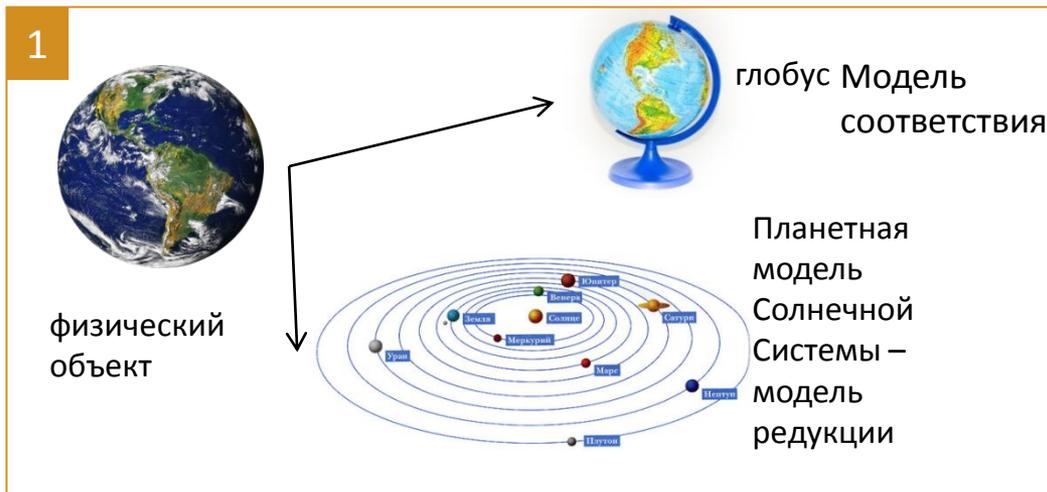
Классические (**неквантовые**) представления о вероятности исходят из того, что случайность является «**ненастоящей**» (субъективной), которая проистекает из-за отсутствия полной информации о событии. Все состояния системы независимы.



Измерение просто проявляет то, что было ранее скрыто (кубик имел определенное «состояние» и до того как его вынули из урны). Хотя кубики существуют «сепарабельно» , т.е. независимо друг от друга, но некоторые их свойства «спутаны», например, суммарное число граней или средний «выигрыш».

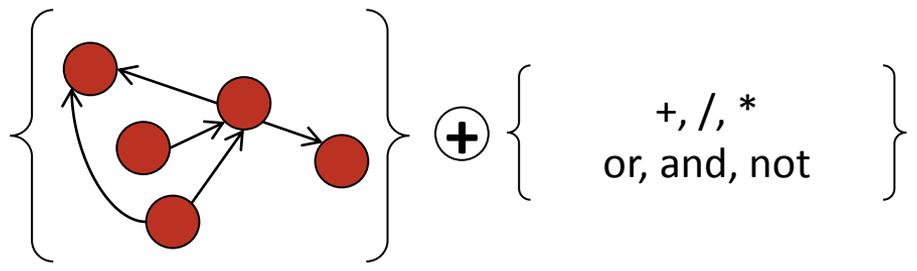
Спутанность проявляется в вероятностном или информационном пространстве состояний.

Воспринимаемая сознанием объективная реальность наделяется квантовыми свойствами:

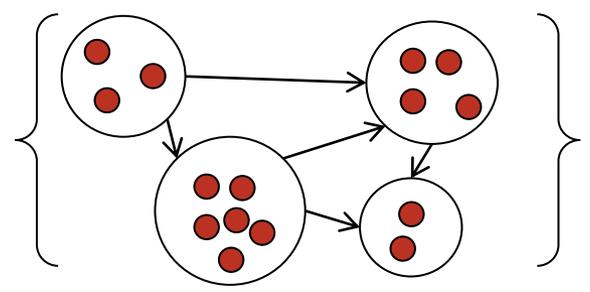


Вычисления как метод обработки информации

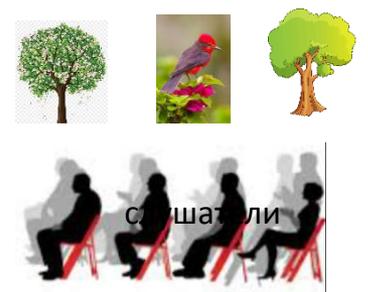
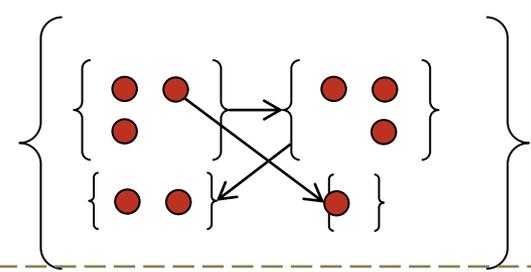
1 Физический мир – это логико-алгебраическая система: множество объектов и операций над объектами, которые детерминировано связаны



2 Физический мир – это частичная алгебраическая система: совокупность подмножеств. Внутри подмножеств действуют свои операции. Модель строится с помощью операций над wybranymi подмножествами, но процессы между множествами описываются вероятностными законами.



3 Физический мир – объединение «малых» алгебраических подсистем и мета-операций. Внутри «малых» подсистем объекты неразличимы, а операции взаимодействия спонтанные (сингулярны).



«Запутывание» квантового объекта с состоянием «СИЛОВОГО ПОЛЯ».



Запутывание – это проявление неоднородности, появления случайности и , как следствие, фактора «информационности»

Что может объяснить «информационный» подход

- Ограничения на симметрию Вселенной и физические преобразования определяют физические законы сохранения: энергии, импульса, момента импульса, заряда, а также характеристики возникающих при расширении Вселенной частиц и полей.
- Неоднородности (информация) порождают различные типы взаимодействия, частицы и соответствующие им поля, атомы, молекулы, галактики, звезды, планеты, а также ... жизнь,...

Физические следствия «информационной простоты»

- реализуемость трансляционного преобразования времени означает **однородность времени**.
- реализуемость трансляционного преобразования пространства означает **однородность пространства**.
- реализуемость преобразования вращения пространства означает его **изотропность** (т.е. связь между элементами пространства не зависит от выбранного направления).

Следствия «информационной сложности»

- Сочетание классического сложения вероятностей различных **альтернатив** с классическим выбором одного из нескольких равновероятных путей приводит к «волновому» правилу сложения амплитуд вероятностей.
- Тензорное произведение амплитуд вероятностей определяет принципиально новое состояние – так называемую суперпозицию несовместных состояний объекта. Согласно «закону исключенного третьего» одновременное пребывание в несовместных состояний в мире физической реальности запрещено. Суперпозиция возможных состояний является информационной, а не физической характеристикой системы.
- Информационная мера или «неопределенность» вычисляется как функционал от волновой функции объекта.

Ответ первого приближения

- **Вспомним:** теорема Лёвенгейма — Скулема утверждает: Если множество предложений, которые выражаются **в счётном языке**, имеет бесконечную модель, то такое множество имеет и счётную модель.
- **итак:** Одно и то же множество может быть в одной модели счётным, а в другой - несчётным, просто из-за того, что ни одно из взаимно однозначных отображений этого множества на натуральный ряд во вторую модель не попало.

Итак, истинно только приближенное описание !?

- Как ни парадоксально, но именно абстракции и отношения (например, теорема Пифагора), приближенно выполняемые в реальности, позволяют достичь ясного понимания свойств Природы.
- Математическое описание обладает предсказательной силой, только если оно толерантно (робастно) к неточностям количественного описания рассматриваемых объектов реальности.

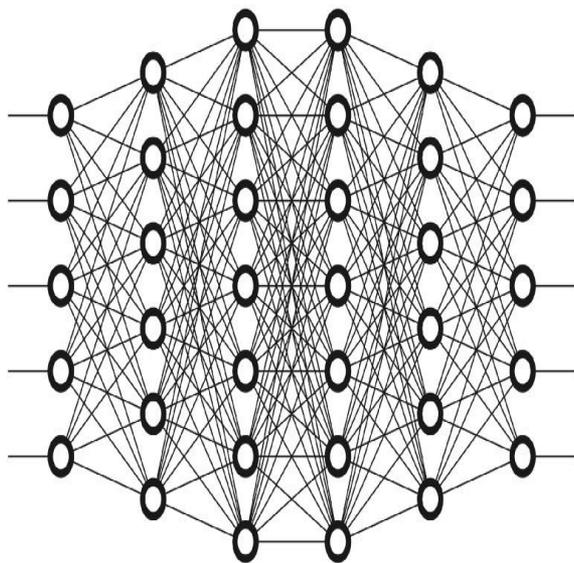
Новый инструментарий формализации реальности: от теория множеств к теории категорий

- В рамках теории множеств считается, что любой объект исследований должен принадлежать некоторому множеству. При выполнении операций с объектами несущее множество не меняется.
- В теории категорий **преобразования** объектов (объекты – аналоги множеств, преобразования – аналоги отображений) входят в аксиоматическое определение наравне с объектами. В итоге объекты оказываются предельным случаем (результатом) преобразований. Предметом исследования становятся совокупности способов преобразований объектов, т.е. процессы.

Множества vs категории

- категории являются гибким «шаблоном», с уже готовыми конструкциями и теоремами, по которому можно строить самые разные физические теории

Нахождение решений в «пространстве возможностей» нейронной сети



Завершения процесса обучения оцениваться на основе анализа структуры аттрактора вектора состояний слоев нейронной сети

