



КАФЕДРА
ТЕЛЕМАТИКА

История и методология математики и компьютерных наук

Санкт-Петербургский
Государственный
Политехнический
Университет

Институт прикладной
математики и механики

*Не бойтесь
расти медленно,
бойтесь остановиться
/Будда/*

Лекция 10

**Вопросы вычислимости: от логических ошибок
программных автоматов к суперпозиции
несовместных состояний квантовых систем**

17 ноября 2021 г.



ЧТО БЫЛО НА ПРОШЛОЙ ЛЕКЦИИ

Кто отказался от излишеств,
тот избавился от лишений.
Иммануил Кант

- Формально любой **алгоритм вычислений** решения прикладной задачи с точки зрения физики совершает «работу» по формированию «траектории» **движения** данных в памяти программного автомата из «области начальных условий» в «область решения задачи».
- **Алгоритмом** решения может быть реализован разными «субстратами»: «**программой**», хранящейся в памяти, или непосредственно самой структурой «вычислителя»
- Определить «истинность» полученного решения на основе правил формальной логики, следуя **закону исключенного третьего**, который полностью лишен контекстов, в большинстве случаев нельзя.
- Дилемму – «вычисленное решения либо «истинно», либо ложно» надо связать с выбором «**наблюдателя**» способного указать, при каких условиях полученное решение м.б. «Истинно», а когда «Ложно». (для этого требуется учет контекста с использованием методов модальной логики)



ПОЛИТЕХ

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК

Истина не формализуема так как не все события подчиняются логике «причинно-следственных» связей, а формальная логика, основанная на законе исключенного третьего, не позволяет учесть контекст вычислений.

Поэтому полученные решения нуждаются в интерпретации либо со стороны «умного наблюдателя», либо подсистемы ИИ (машинного обучения).

Интерпретация «требует» памяти о том, с какими ограничениями была связана формализация задачи и для какой цели полученное решение будет использовано

Example 1

*A stone and a water wave are of **different matter**.*

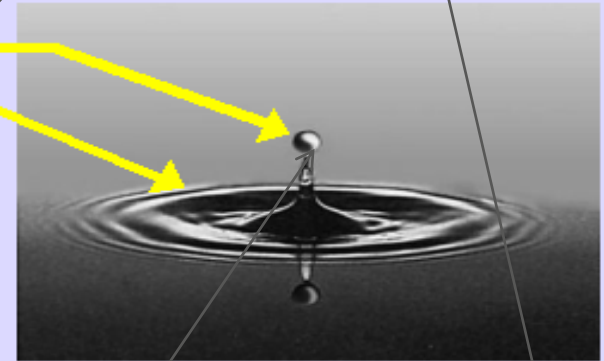
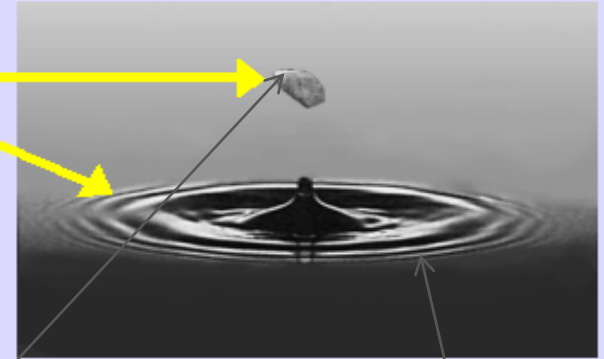
In this case, the wave-particle duality remains an enigma because a stone cannot become water and conversely.

Example 2

*A drop of water (corpuscle) and a water wave are of **identical matter**.*

Water has either a corpuscle behavior or a wave behavior.

In this particular situation, wave-particle duality is explained with logic and consistency.



Материальный объект в R^4 пространстве-времени Минковского

... и капля – материальный объект «превратилась» вволну

Дуальность «истины» проявляется там, где объект и среда имеют одно и тоже строение. **It from bit**

Математический способ моделирования реальности (цифровых вычислений) применим в полной мере только для причинно-следственных взаимосвязей, а классические представления о вероятности исходят из того, что **случайность** является «**ненастоящей**» (субъективной), т.е. проявление отсутствия информации.

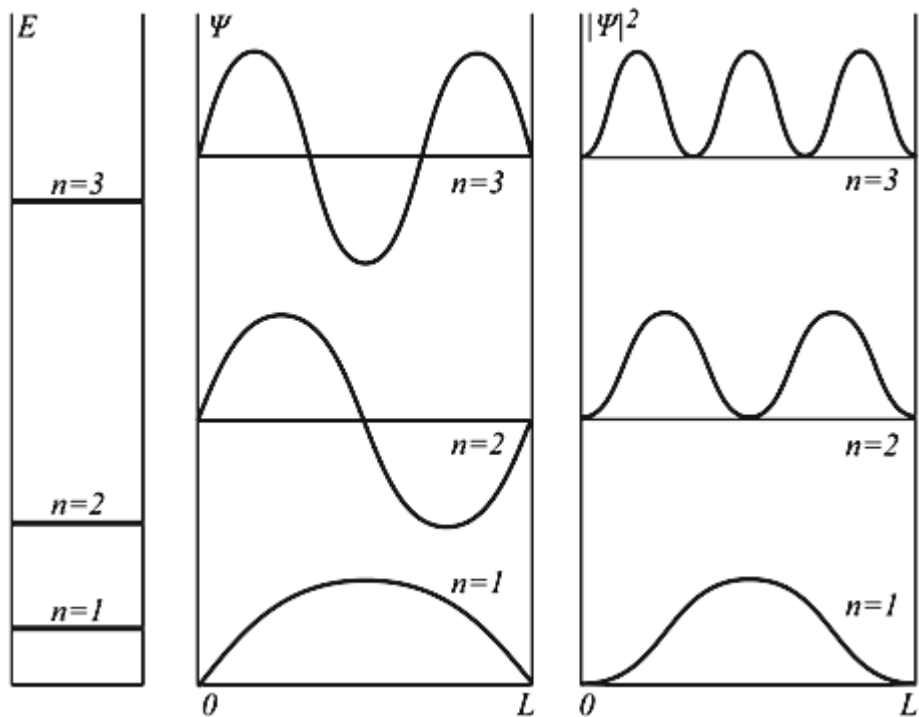


Считается, что объект **обладает конкретным свойством** или значением параметра и **до измерения**, Само измерение просто проявляет то, что было ранее скрыто (кубик имел определенное «состояние» и до того как его вынули из урны).

А как моделировать процессы, которые рассматриваемой ситуации причинно не связаны и поэтому логически не вытекают друг из друга,



- Надо признать, что область применения современной математики не безгранична. Математика применима и весьма эффективна только в тех случаях, когда речь идет об «однородных и делимых сущностях», для которых **логика** УЖЕ выявила и описала явные причинно-следственные связи. Однако большинство взаимосвязей в природе носят не причинно-следственный, а ассоциативный характер. Что значит «ассоциативный»?
- Ассоциация – это не сам процесс, а ...образ или набор значимых фактов, которых хранятся в памяти и составляют сущность когнитивных функций, формирующих «материю» сознания/мышления.
- Хотя ассоциативное мышление человека – это физиологический процесс, протекающий в субстанции мозга. Может ли аналогичный процесс с помощью алгоритмов быть реализован в каком либо «компьютерном железе» - в новой субстанции?



Уровни энергии и волновые функции частицы Ψ_i в бесконечной прямоугольной яме. Квадрат модуля волновой функции $|\Psi|^2$ определяет вероятность нахождения частицы в i -ом состоянии

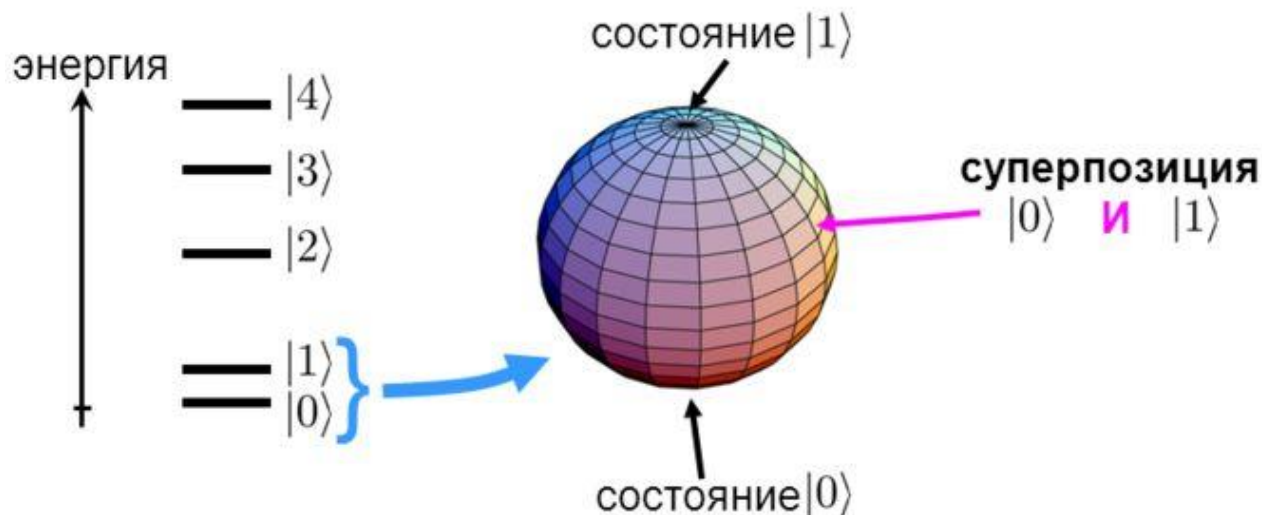


ПРИМЕР – «КИНОРЕАЛЬНОСТЬ» КАК АССОЦИАЦИЯ ИЛИ АНОМАЛИЯ, СОСТОЯЩАЯ ИЗ ВИРТУАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

- «кинореальность» непосредственно не порождает физических явлений, так как «энергетически» не замкнута, но ... оказывает информационное воздействие на объекты, которые способны эту информацию воспринимать.
- «кинореальность» - это объекты, которые с точки зрения классической физики не образуют «состоявшуюся» реальность, поэтому являются виртуальными (**аномальными**) и **не следуют законам «сохранения»....**
- Однако, к «аномальным» также можно отнести объекты, наделенные памятью или сознанием, например, живые организмы, которые способны к целенаправленному «движению» под воздействием не только энергии (внешней силы), но и на **основе обработки информации.**

Кубит

2-уровневая квантовая система (можно различить $|0\rangle$ и $|1\rangle$) может существовать в бесконечном числе физических состояний *промежуточных* между $|0\rangle$ и $|1\rangle$.

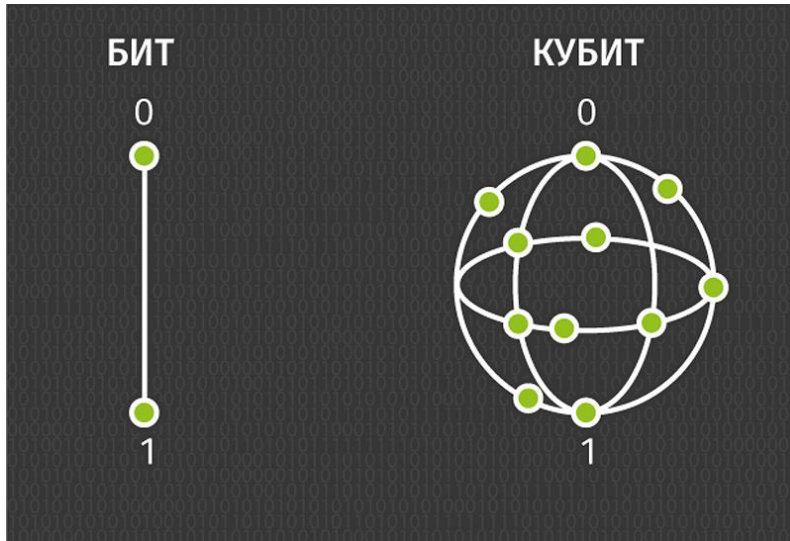


Квантовая система может существовать в двух состояниях *одновременно*



ПОЛИТЕХ

ФОРМАЛИЗМ «КОМПЛЕКСНЫХ» АМПЛИТУД



Когда мы образуем квадрат модуля суммы $w+z$ двух комплексных чисел w и z , мы не получаем только лишь сумму квадратов модулей этих чисел, но и дополнительную «поправочную» компоненту:

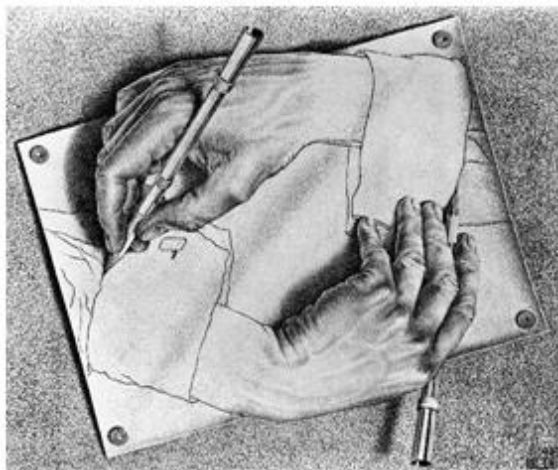
$$|w + z|^2 = |w|^2 + |z|^2 + 2|w||z|\cos(q),$$

где q – угол, образуемый направлениями на точки z и w из начала координат на т.н. плоскости Аргана...

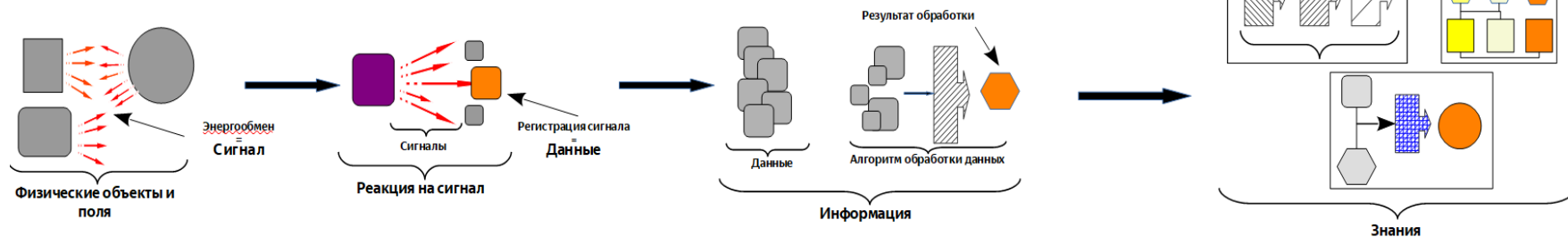
- Физики говорят, что поправочная компонента $2|w||z|\cos(q)$ описывает «квантовую интерференцию» между альтернативными составляющими объекта, но ... интерференционное **слагаемое** не проявляется, если субъект обладает информацией («**знанием**») о траектории движения частицы.
- Такая квантовая суперпозиция (феномен в поле комплексных чисел) не имеет место для макроскопических **физических объектов (у этих объектов нет своей локальной памяти)**, а есть **информационно-вычислительный феномен**, описывающий свойства реальности, в которую входят «аномальные» объекты.

ИНФОРМАЦИЯ В «ЗАПУТАННЫХ» СИСТЕМАХ или ПРОБЛЕМА ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

Картина Эшера рисующие руки



Пример взаимного сосоздания и циркулярной причинности.
Метафора странной петли Хофштаттера



АТРИБУТ И ФУНКЦИЯ: ПОЧЕМУ ФИЗИКА «ОБХОДИТСЯ» БЕЗ ИНФОРМАЦИИ

- Физические процессы – это результат взаимодействия различных объектов в псевдо эвклидовом «пространстве-времени» Минковского. «Места» для хранения информации в этом пространстве нет. Но «сложные» объекты, наделенные «памятью» могут находиться:
 - в «**смеси**» состояний, т.е. одном **конкретном состоянии**, параметры которого есть результат «измерения» всех параметров «чистых» состояний его составных частей (описываются т.н. матрицей плотности)
 - в **суперпозиции** – **линейной комбинации** «чистых» состояний, т.е. находиться одновременно во всех «чистых» состояниях, но ... с различной вероятностью, результат измерения «коллапс» волновой функции дает случайный результат.
 - **несепарабельной суперпозиции** «чистых» состояний, т.е. запутанной (взаимозависимой) суперпозиции, которая не факторизуется на тензорные произведения «чистых» состояний. В этих условиях возможен «обратный коллапс» волновой функции.



ЧТО ОБСУЖДАЛИ НА ПРОШЛОЙ ЛЕКЦИИ :



- Сложный объект проявляет совокупность альтернативных состояний, поэтому его описание основано на принципе дополнительности (принцип коммутарности) Н. Бора.
- Современный компьютер – это совокупность простых (бинарных) устройств, работа которых синхронизируется во времени тактовым генератором (частота синхронизации 2-5 ГГц) и действия контролируются с помощью правил бинарной логики.
- В случае квантовых явлений известны лишь волновые функции (вектора состояния из уравнения Шредингера) $|\psi\rangle$ и $|\phi\rangle$, а квантовая система может находиться в состоянии их суперпозиции

$$a|\psi\rangle + b|\phi\rangle,$$

где коэффициенты a, b – это комплексные числа,
такие что $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

- Если возможные численные значения «состояния» системы обозначим q , то величина q «вычисляется» как **собственные значения** (СЗ) оператора энергии Q квантовой системы (Q – это гамильтониана системы или оператор ее полной энергии). СЗ вычисляются как решение уравнения:

$$Q|\psi\rangle = q|\psi\rangle$$

- Собственный вектор оператора Q образуют базис комплексного гильбертова пространства состояний квантовой системы

$$|\phi\rangle = \sum a_j |\psi_j\rangle \quad \sum |a_j|^2 = 1$$



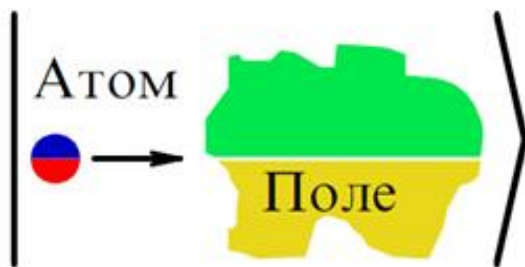
Оператор Q порождает «движение» в соответствии с формулой :

$$|\phi(t)\rangle = U|\phi(0)\rangle,$$

где U отвечает уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\phi\rangle = H |\phi\rangle \quad U = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int H dt\right)$$

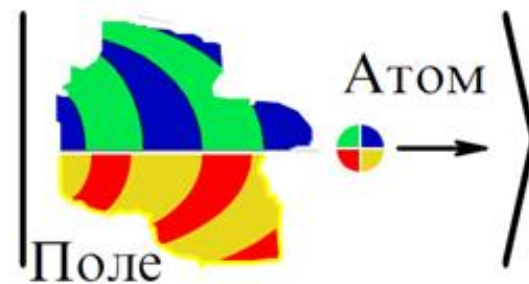
«ЗАПУТЫВАНИЕ» АТОМА В СИЛОВОМ ПОЛЕ



Начальное состояние



Взаимодействие

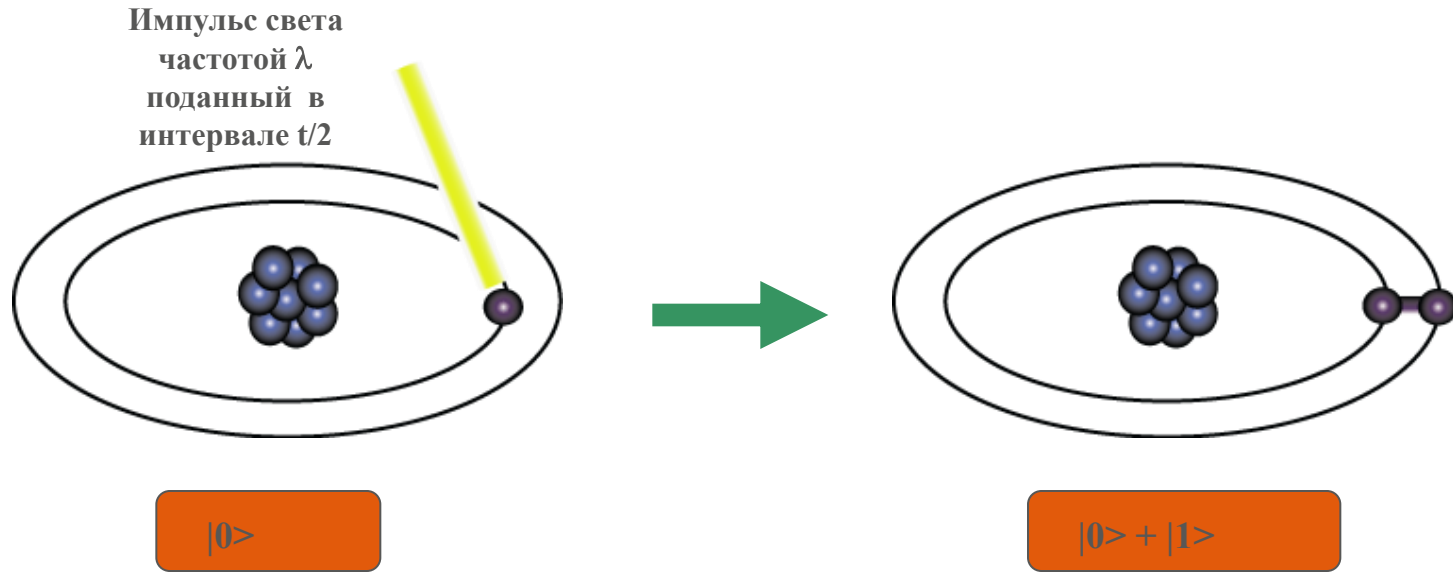


Конечное состояние



ПОЛИТЕХ

КАК ВОЗНИКАЕТ СУПЕРПОЗИЦИЯ



В случае, когда кубитов 3, то суперпозицию всех 8 возможных состояний можно записать как:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} |000\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}} |001\rangle + \dots + \frac{1}{\sqrt{8}} |111\rangle$$

- Суперпозиция это «особое» состояние материи, которое может относиться как физической, так и когнитивной реальности.
- Суперпозиция является не столько физическим, но и **информационно-вычислительным феноменом**.
- «Носителем» этого феномена является **«физическое» вероятностное пространство**, потенциально возможных «чистых» состояний. Для существования такого «пространства» необходимо материю наделить особым ресурсом, а именно память – механизмом переноса состояний во времени.
- Рассматривая информацию как феномен реальности, можно предложить «формулу» физической реальности :

материя= (вещество + энергия) + информация.

Примеры, когда правдоподобное объяснение процессов в рамках классической физики найти невозможно:

- поведение косяка мелких рыбешек или мелких птиц перед отлетом их на юг;
- поведение толпы людей на концерте популярного ансамбля;
- явления предшествующие землетрясению: поведение животных, заряженные частицы в атмосфере, свечение воды, образование облаков и пр.;
- кооперативные явления в природе и обществе, самоорганизация, фликкер-шум и пр.;
-



Пример: Макроскопическая МНОГОЧАСТИЧНАЯ информационная ЗАПУТАННОСТЬ



Случай политическая
«полигамия»



случай
классическая
«моногамия»:



Topological order and quantum entanglement

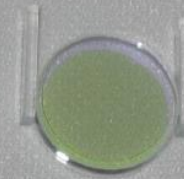
Michael Levin, Xiao-Gang Wen

MIT

<http://online.itp.ucsb.edu/online/qubit06/levin/>

LIGO

MIT Radiation Pressure Experiment Optical Coatings: Noise and Other Issues



Tim Bodiya

MIT: S. Ackley, T. Corbitt, D. Sigg, N. Smith, C. Wipf, N. Mavalvala
Caltech: Y. Chen, R. Bork, J. Heefner, S. Whitcomb, S. Danilishin
AEI: H. Ebhardt-Mueller, H. Rehbein, K. Somiya
LIGO Hanford Observatory: D. Sigg

Workshop on Optical Coatings in Precision Measurements
March 20-21

<http://www.ge.infn.it/~gemme/virgo/CoatingWorkshop/bodiya.pdf>



Quantum Information Technology: Entanglement, Teleportation and Quantum Memory

October 23, 2002

Applications of Entanglement

Seth Lloyd

MIT Department of Mechanical Engineering

2-мерное гильбертово пространство с базисом $|e\rangle, |g\rangle$

$$|e\rangle = 1 \cdot |e\rangle + 0 \cdot |g\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |g\rangle = 0 \cdot |e\rangle + 1 \cdot |g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Волновая функция кубита эволюционирует в 2-мерном гильбертовом пространстве

$$|\phi\rangle = a|e\rangle + b|g\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Скалярное произведение $\langle \phi_k | \phi_l \rangle = \begin{pmatrix} a_k^* & b_k^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_l \\ b_l \end{pmatrix} = a_k^* a_l + b_k^* b_l$

Операторы, действующие на состояния кубита – 2×2 матрицы

$$Q|\phi\rangle = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11}a + q_{12}b \\ q_{21}a + q_{22}b \end{pmatrix}$$

Все возможные состояния связаны унитарными преобразованиями

$$|\phi\rangle \rightarrow U|\phi\rangle \quad U = \begin{pmatrix} c \exp(-i\alpha) & -t \exp(i\beta) \\ t \exp(-i\beta) & c \exp(i\alpha) \end{pmatrix}, \quad c^2 + t^2 = 1$$

Разные состояния кубита не всегда различимы.

При измерении состояния $|\phi_1\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ есть возможность обнаружить другое состояние $|\phi_2\rangle = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ с вероятностью $P = |\langle \phi_2 | \phi_1 \rangle|^2$

Различимы только ортогональные состояния, например, собственные состояния эрмитовых операторов.

- Физика запрещает передачу информации «в пространстве-времени» со сверхсветовой скоростью. Это объясняется принципиально вероятностным характером измерений и теоремой о запрете клонирования.
- Вероятностная природа измерений (результат того, куда перейдет суперпозиция – случаен) открывает новые возможности не только описания, но и формирования реальности за счет т.н. слабых квантовых измерений (англ. weak quantum measurement), когда заданная последовательность таких измерений прерывается, когда достигнуто «желаемое» состояние.
- Стабильные и самоподдерживающимся суперпозиции могут существовать как на квантовом уровне (в «пространстве-времени» так и на макроскопическом уровне (информационно-вычислительное пространство)