КАФЕДРА
ТЕЛЕМАТИКА

Санкт-Петербургский Государственный Политехнический Университет

Институт прикладной математики и механики

История и методология математики и компьютерных наук

Лекция 1

«Книга природы написана на языке.... математики»

Г. Галилей
(1564-1642)

8 сентября 2021 г.

Курс разработан в рамках профиля подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки (МКН)

В Курсе рассматриваются исторические и методологические аспекты МКН и … дается ответ на вопросы: 1) почему М и КН основа современных знаний о Природе и 2) что изучение этого курса дает для профессионального роста.

Исходим из того, что:

Матема́тика (др.-греч. μάθημα — изучение, наука) —наука о структурах, порядке и отношениях, построенных на основе операций счёта, измерения и сравнения объектов.

Объект изучения – что такое число и как оно существует

Предмет изучения - пространственные формы, количественные отношения и функции «физической реальности»

Компьютерные науки (computer science) – наука о методах и процессах сбора, хранения, обработки, передачи, анализа и оценки информации.

Объект –типы данных, информационные структуры и взаимодействия

Предмет – процессы, алгоритмы и вычислительные машины

Тематики курса

- **Тема 1. Методология математики**. История развития математики как фундаментальной и прикладной науки. Числа, слова и операции. Место математики в современной системе научных знаний. Основные принципы, теоремы и структуры.
- **Тема 2. Математика и физика.** Технологии и средства вычислений. It from bit Физические носители информации, информационное взаимодействие. Киберфизика.
- **Тема 3. Методы компьютерных наук.** Вычислительные и информационные процессы. Алгоритмы, программы и вычислительные структуры. Теория информации и технологии кодирования
- **Тема 4. Машинное обучение и искусственный интеллект .** Алгоритмы или данные: from data-driven to knowledge-drive computing . Натуральные вычисления. Квантовая информация

Общая характеристика обсуждаемых проблем

Математика

- Формирование понятия числа в контексте геометрии, логики, арифметики, анализа, топологии, теории меры
- От чисел и функций к алгоритмам – физически реализуемым функциям. Понятия вычислимость, перечислимость, разрешимость

Компьютерные науки

- Диофант, Р. Лулий, Корсаков, Бэббидж, Тьюринг и др.
- Физика вычислений: энергия/масса/тепло/число/информация
- Прямые задачи компьютерных наук – алгоритмы вычисления
- Принципы ускорение вычислений
- Методы управления вычислениями, сигнатуры языков программирования

Машинное обучение и искусственный интеллект

- Данные vs алгоритмы. Машина Тьюринга vs нейронная сеть
- ИИ - обратные задачи КН – построение алгоритмов, реализуемых с помощью «машин».
- От численных равенств функций к похожести и «эквивалентности»

Введение: Число, понятие строгости, непротиворечивость

- **«Все есть <u>число</u>», Пифагор**

(Вещь может быть познана только через раскрытие ее числа).

- **«В нача́ле бы́ло Сло́во («λόγος», 道)» —Евангелия от Иоанна**

- **<u>Строгость</u> математического рассуждения объясняется <u>простотой</u> ее предмета. Аристотель (384 г. – 322 г. до н.э.)**
  - **Основа строгости - аксиоматический подход, основанный на определениях и доказательствах (Геометрия Эвклида (325 – 265 г. до н.э.)**
  - **Простота - интуитивная очевидность (Уильям Оккам (1285–1347) - не следует умножать сущности сверх необходимости)**
- **Существуют математические теории, которые не обладают априорной <u>наглядностью</u> и самоочевидной основой. Лобачевский (1792 – 1956 гг.)**
- **От математической теории не требуется ни наглядности, ни рациональной очевидности, существенно только требование логической <u>непротиворечивости</u>.** Гильберт (1862 – 1943 гг.)

Что говорят о математике «Великие» :

- «Математика —язык, на котором написана «**книга природы**» (Г. Галилей)
- «Математика – это способ описания перехода от одних **опытных суждений**, к другим»(Н. Бор)
- «Математика – иерархия **формальных структур**»(Н. Бурбаки)
- «Математика —наука о количественных отношениях и пространственных формах **действительного мира**»(А. Колмогоров)

Проблема обоснования математики

Суть проблемы:

- какие объекты допустимы в математике и как они могут существовать,
- существовать может то, что доказуемо
- объективизация математического доказательства - обращение к физической реальности не может содействовать проверке истинности или ложности математических теорий

О. Коши теоремы существования, которые ознаменовали новый этап в понимании статуса математического объекта. В результате на первый план стал выдвигаться логический аспект математических доказательств. …

Геометрия Н.И. Лобачевского показала, что «здравый смысл» не может быть критерием истинности

Г. Кантор (1845-1918) предложил свести все существующие математические теории к теории множеств

Программа Д.Гильберта (1862-1943) предполагала доказательство непротиворечивости математики проводить точными методами

Теоремы К. Гёделя (1906-1978) о неполноте, во всякой формальной системе, содержащей арифметику

МАТЕМАТИКА или математические науки– все ли так?!

- **17 век**: Cogito, ergo sum (лат. — «**Мыслю, следовательно, существую**»)

- **21 век**: Computo, ergo sum (лат. - «**Вычисляю, значит существую**»).
- Вопрос об отношении математики к реальному миру является одним из основных для объяснения природы математики как науки.

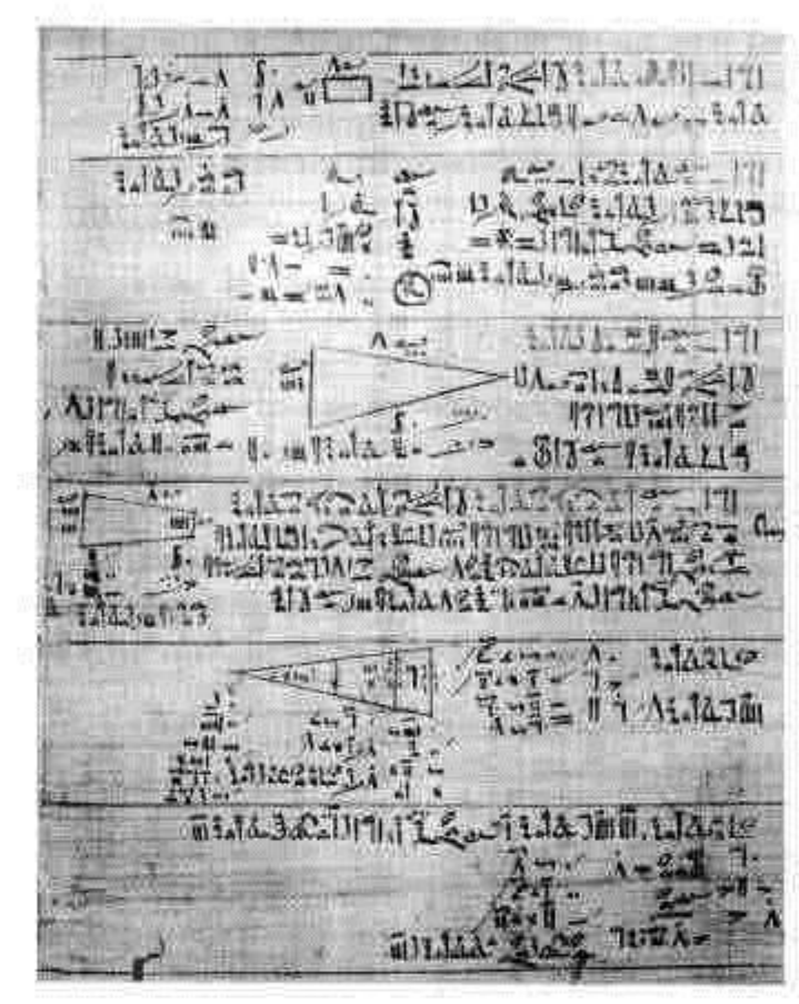
Пример: Информационно-Вычислительный натурализм: законы физики – **«компьютерные» программы**, а Вселенная - **квантовый компьютер**, который вычислят самого себя?!

Идеализация как основа математики:

- Специфика математической реальности
- Статус математического понятия
- Классификация математики
- Математика и физика…Математика и биология…

Древний Египет

- Папирус Ринда - собрание 84 задач прикладного характера.
- При решении задач производятся действия с дробями, вычисляются площади прямоугольника, треугольника, трапеции и круга, объёмы параллелепипеда, цилиндра, размеры пирамид.



Древний Вавилон (Двуречье)

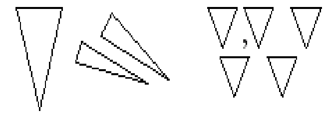
XXIII в. до н.э. – регулярные работы по строительству

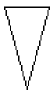
Требования к «математику»:

«уметь писать понятно, знать текст, межевать земли и примерять спорящих»

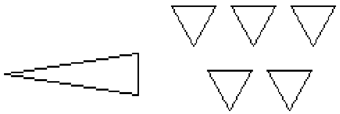
Знака для нуля у вавилонян сначала не было. Позже был введён знак , заменявший современный нуль.

Так записывали число 3605:

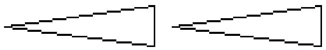


т.е.  $= 60^2 = 3600$;

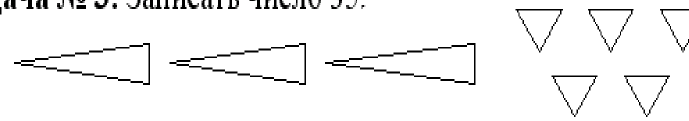
Задача № 1: Записать число 15



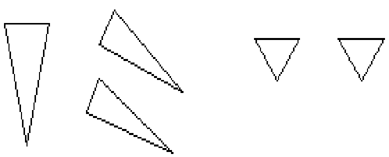
Задача № 2: Записать число 20;



Задача № 3: Записать число 35:



Задача № 4: Записать число 3602;



Достижения Вавилонской математики

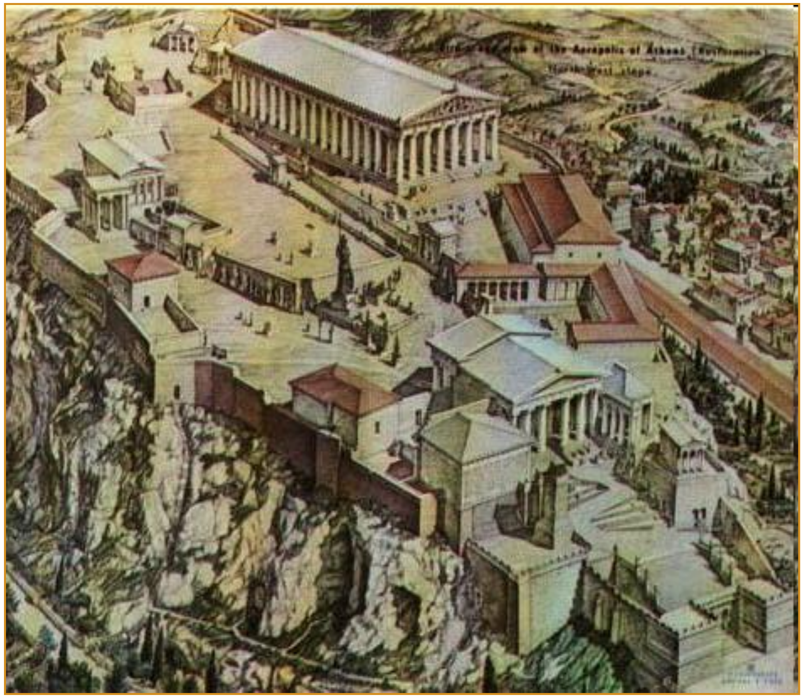
- Шестидесятеричная система исчисления
- Использование:
- **ноля** как пунктуационного знака, определяющего разряд числа,
- **дроби** для записи результатов математических операций

Что умели:

- извлекать квадратные корни
- решать линейные и кубические уравнения с помощью таблиц
- Проводить измерения, связанные с окружностями

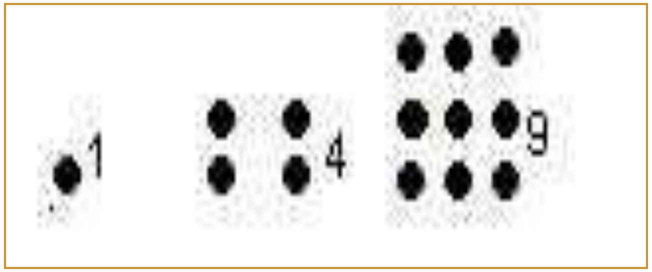
Древняя Греция VI – IV вв. до.н.э.

- Математика оформляется как наука с особым методом **дедуктивного (формального) доказательства**



Математика геометров (Пифагор, Эвклид) и астрономов (Птолемей)

Квадратные числа:



**Вводят доказательство, в том числе,
доказательство от противного,
логика (закон «исключенного третьего»)**

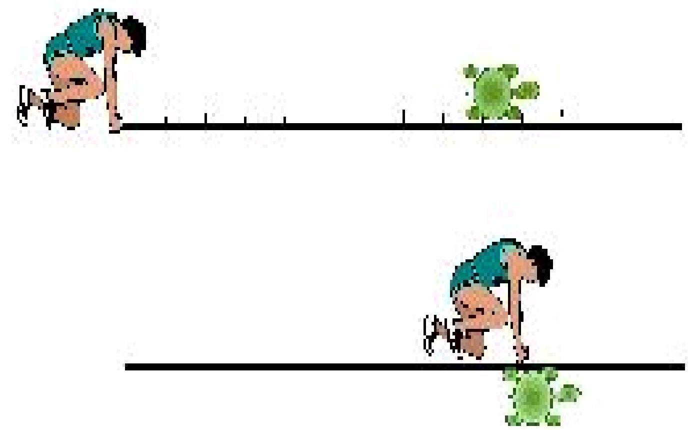
Числа:

- Четные – мужские
- Нечетные – женские

«Элементы чисел являются элементами всех вещей и весь мир является гармонией и числом»

Зенон Элейский – проблема конечного и бесконечного

- Апории:
- «Ахиллес и черепаха»
- «Стрела»
- «Стадион»
- «Дихотомия»



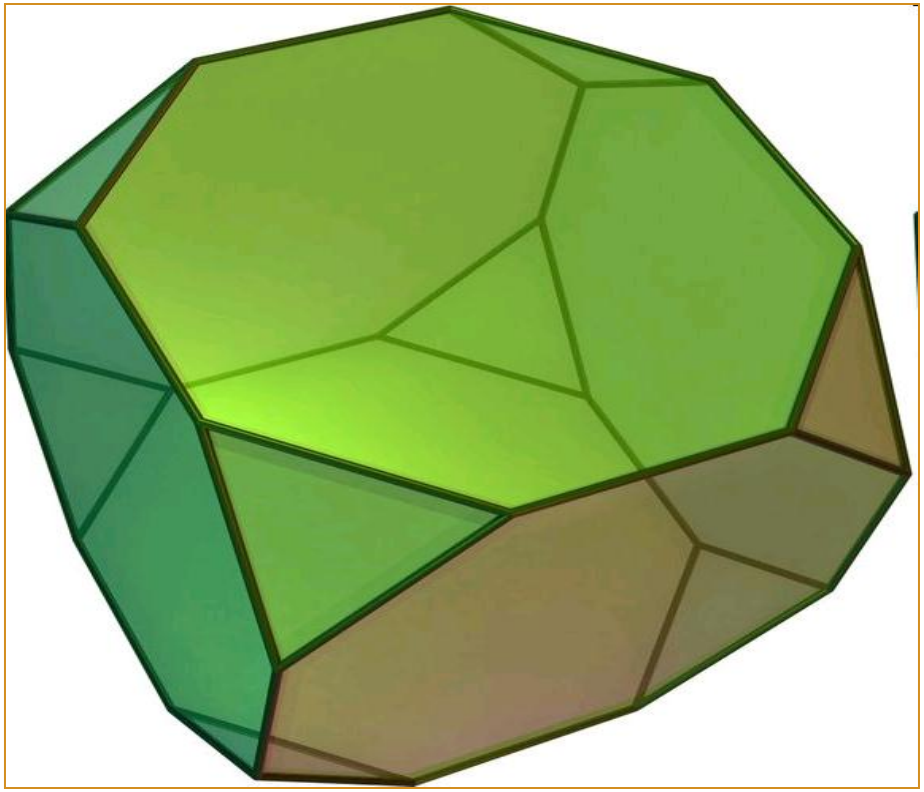
Евклид (IV – III вв. до н.э.)

- «Начала» - логическое построения геометрии на основе аксиоматики
- планиметрия, стереометрия, вопросы теории чисел, алгебры, общей теории отношений и метода определения площадей и объемов,

Архимед (287 – 212 г. до н.э.)

- Трактат "Псамит" в котором он указывает способ для вычисления количества песчинок, могущих заключиться в объеме земного шара.

Полуправильные многогранники (Архимедовы тела)



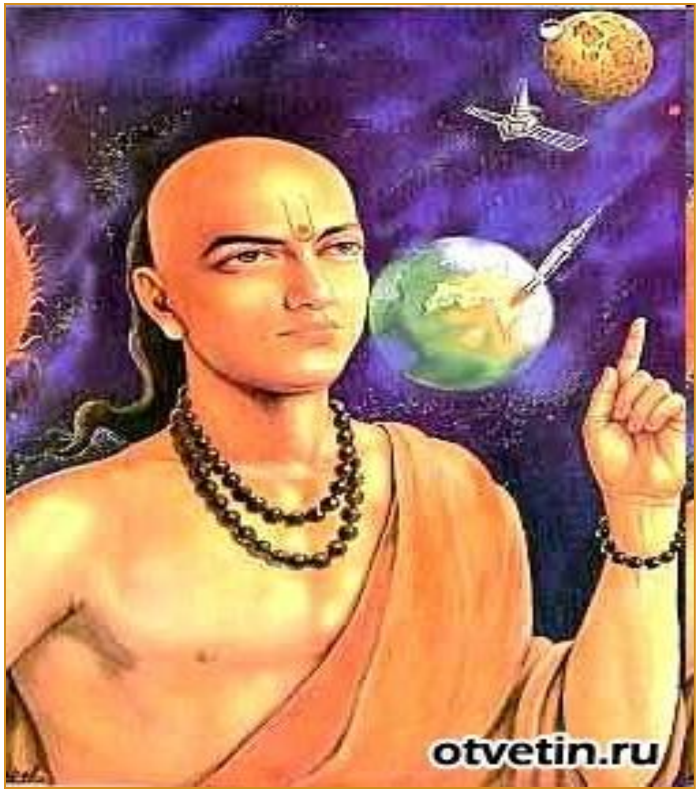
Усеченный куб

Греческие основатели современной математики:

- Архид из Тарента (V – IVвв. до н.э.)
- Евдокс Книдский (V – IVвв. до н.э.)
- Антифон (V – IVвв. до н.э.)
- Гиппократ Хиосский (V – IVвв. до н.э.)
- Зенон Элейский (V – IVвв. до н.э.)
- Евклид (IV – III вв.до н.э.)
- Архимед (III в. до н.э.)

Индия ок. 7 в. н.э. - Ноль как число

- Брахмагупта - сделал попытку увязать понятия ноля и отрицательных чисел с арифметическими **операциями**



Арифметические действия с нулем

- Сумма нуля и отрицательного числа – число отрицательное, нуля и положительного – положительное, сумма нуля и нуля равна нулю.

- Если из нуля вычесть отрицательное число, то получим положительное, если вычтем из нуля положительное, то получим отрицательное. Если из нуля вычесть ноль, получим ноль.

- Положительное или отрицательное число, деленное на ноль, есть дробь с нулем в знаменателе. Ноль, деленный на положительное или отрицательное число, есть ноль, что можно выразить как дробь с нулем в числителе и ограниченной величиной в знаменателе. Ноль, деленный на ноль, дает ноль.

Брахмагупта

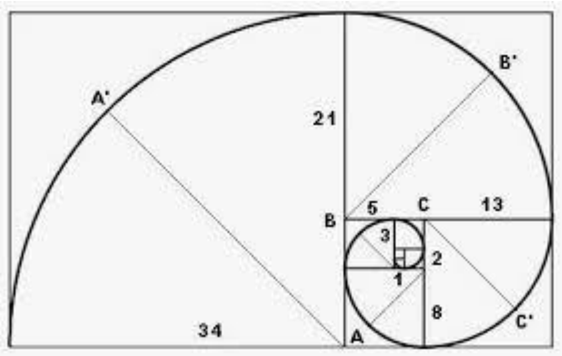
Фибоначчи (Леонардо Пизанский) – итальянский математик

- 1202 г. «Книга абака»
- 1-9 – числа
- 0 – знак

Ряд Фибоначчи (задача о кроликах) :

1, 1, 2, 3, 5, …. F_n, F_{n+1}, F_{n+2}

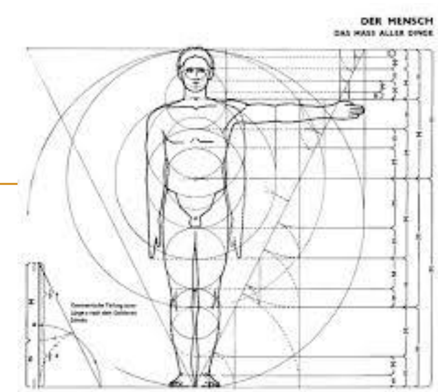
F_n/F_{n+2} -> ?



… а также

Решил задачи:

- определения объема цилиндра и шара, объемов частей параболоидов вращения,
- положения центра тяжести плоских и пространственных фигур и для многих случаев решил ее,
- применил в геометрии метод «мысленного взвешивания»,
- развил предложенный греческим ученым Евдоксом «метод исчерпывания», позволивший исследовать свойства кривых второго порядка.



Сформулировал основной вопрос математики: что есть число?

- Что такое единица, ноль, бесконечность ?
- сколько единиц существует ?
- как единицы можно складывать?
- что такое 1 + 1 (что такое складывать предмет сам с собой)
- чем первая единица отличается от второй в равенстве

1 = 1

и почему

6-5=1

Выводы: Математический объект – абстракция от абстракции

- Математический объект – количественная характеристика множества предметов
- Число – абстракция от исходной абстракции (все «пятерки» – число 5)
- Формула – абстракция от числа

Объект математики

- количественные и пространственные отношения (А.Н. Колмогоров)

Как и «где» существует математический объект, представленный символом/знаком?

- Реализм – «Математические объекты существуют **вне нас** в силу той же необходимости как и объекты реального мира» Ш.Эрмит
- К.Гедель, А.Колмогоров

- Номинализм – реальны только отдельные вещи, существует то, что имеет **пространственно – временную координату**.
- В.Куайн, Н.Гудмэн

Классификация математики

- До аксиоматическая – аксиоматическая

- Формирование принципов построения дедуктивной теории

- Прикладная – теоретическая

- Математика:

1. Язык науки
2. Модель для количественного описания природного мира, социума и технических устройств

Принципы построения дедуктивных теорий

Дедуктивная теория – система, принципы которой выводимы из аксиом.

Составляющие аксиоматических теорий:

- Исходные понятия (объекты);
- Исходные утверждения, связывающие исходные понятия;
- Правила логического вывода

Требования к аксиомам:

- Непротиворечивость – два принятых исходных положения не должны противоречить друг другу.
- Независимость – аксиому нельзя доказать с помощью других аксиом.
- Полнота - все формулы данной системы выводимы по ее правилам и с использованием существующих в ней аксиом.

Пример аксиоматической системы:

- Механика И.Ньютона: закон инерции, закон пропорциональности силы и ускорения при постоянной массе, закон равенства действия и противодействия

Современные философские проблемы математики:

- XIX – XX вв. – проблема обоснования математики - вопрос о соотношении концептуальных математических построений и объективной реальности, которую они должны в конечной инстанции отображать.
- Вычислимы ли когнитивные функции ?

Концепции математики XX в.

- Логицизм: (Г. Фреге, Б. Рассел и др.) - основания математики **в логике**;
- Интуиционисты (Я. Брауэр, Г. Вейль, А. Гейтинг, Л. Кронекер и др.) – математика **опирается на интуицию**;
- Формализм (Д. Гильберт, В. Аккерман, И. Бернайс, фон Нейман) – основания математики – **математические знаки**.

От математики к компьютерным наукам– все ли так?!

Аспекты «тривиальные» - за:

- Средство ускорения «механических» вычислений.
- Методы обработки данных, представленных в цифровой форме
- Средства управления и моделирования

Аспекты, требующие осмысления и более глубокого понимания

- «Книга природы» написана на языке математики (Г. Галилей), но не ясно какой математики ? Вычислительной ли?
- Законы физики не содержать «событий», в них нет информационного начала. Почему? Будет ли создана «физика мира мысли» ли физика потенциально возможного? («духи» $p<0$, тахионы $v>c$)
- В чем «вычислительные машины» могут быть лучше, чем люди?
- Информационно-вычислительный натурализм – **вычисления vs понимание**; Непрерывное vs дискретное. Возможен ли компромисс?
- Неполнота и противоречивость формальных систем (Теоремы Геделя, информационный «пепел» и закон «исключенного третьего»)

«Сингулярность» , которая близка.....

- «Мы»:

Последнее поколение людей, физические возможности которых ограничены естественной морфологией человеческих тел и органов чувств и Первое поколение, для которого расстояние – «время доставки сигнала» , возможности ограничены лишь воображением.

«Сингулярность – это ближайшее будущее, когда скорость технического развития будет настолько высока, а изменения окружающего мира будут настолько фундаментальными, что кардинально изменят существование людей». В итоге «ментальность будет управлять реальностью , другими словами - **киборгизируйся или умри** ;-)