



Санкт-Петербургский  
Государственный  
Политехнический  
Университет

Институт прикладной  
математики и механики

КАФЕДРА ТЕЛЕМАТИКА

**Семинар на английском языке**

**lecture 5**

**Modal logics, Probability and Relational  
(flickering) semantics**

---

30.09.2020

# What we have discussed in previous lecture :probability, trust , knowledge

- how we can extract knowledge from the surrounding data ?

Conventional computers are **good at calculating**, but they are poor for some tasks that are easy for humans. Basic idea - uses **probability** as new measure of **trust** (confidence level) of surrounding data **extract** available **knowledge**.

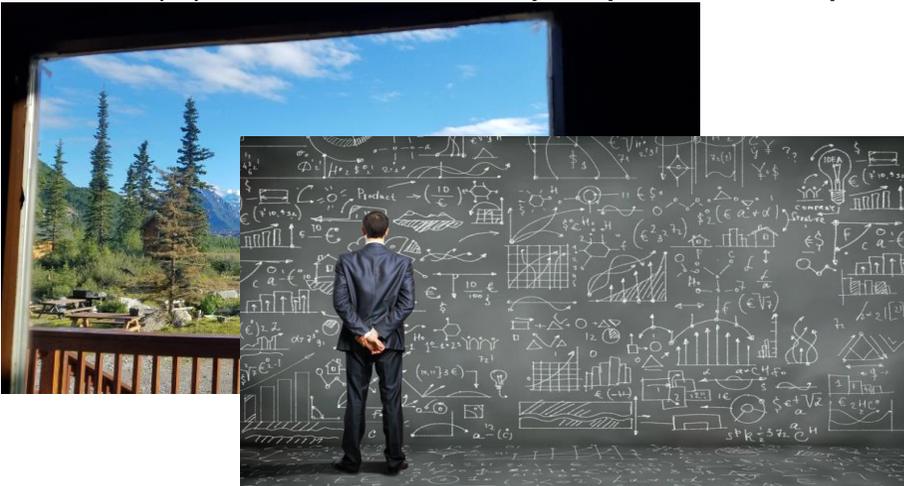
$$P(A|B) = \frac{P(B|A) * P(A)}{P(B)}$$

Левая часть уравнения — **апостериорная** (после опыта) оценка вероятности события А при условии наступления события В (т. н. условная вероятность).

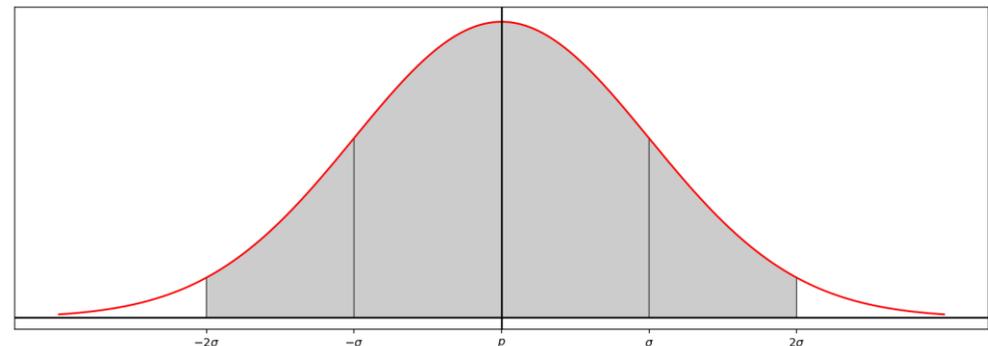
$P(A)$  — вероятность события А (**априорная** оценка);

$P(B|A)$  — вероятность (условная), которую мы получаем из наших данных;

$P(B)$  — константа нормировки, которая ограничивает вероятность значением 1.



confidence level: fundamental aspect of a priori (Conventional) knowledge



# Introduction

**Modal logic** is a collection of formal systems widely used to represent statements about **necessity** (необходимо) and **possibility** (возможно) .

**Probability** is the branch of mathematics concerning numerical descriptions of **how likely** (насколько вероятно ) an event is to occur.

Main modal formula can be read as "if **P** is **necessary**, then **It** is also **possible**".

There are a range of different types of **modal logics**, all of which use a similar set of **logical axioms and rules that applied to** diverse range of topics: from **time** (temporal logic) to **ethics** (deontic logic), norms, and **knowledge** (epistemic logic).

Today we will discuss relational semantics (Kripke structure) and explain how it can be applied over several types of the modal logics.

# Пример : classical vs modal (temporal) logic

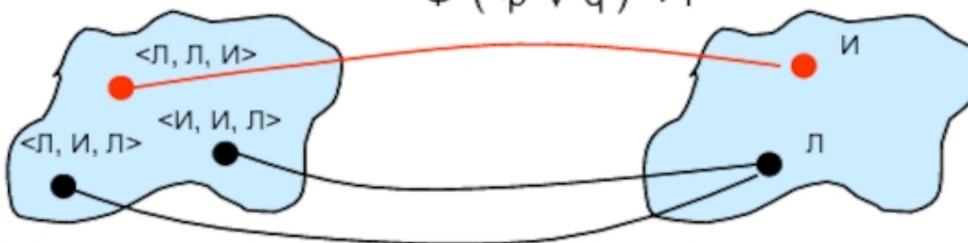
операторы свойств: X – next time, U – Until, F – in the Future и

Кванторы «пути» : E- Exist, A - Always

## Классическая и темпоральная логики

Логика высказываний

$$\Phi = (\neg p \vee q) \Rightarrow r$$

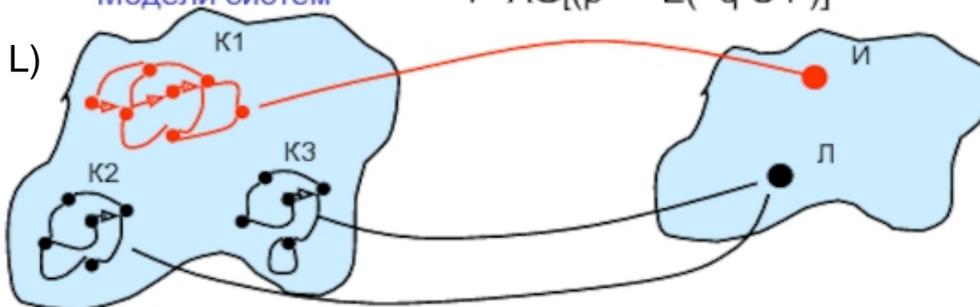


Интерпретации PL –  
наборы значений  
переменных <p, q, r>  
(конечное число)

Интерпретация <Л, Л, И> - модель формулы  $\Phi$

Темпоральная логика  
Модели систем

$$\Phi = AG[(p \Rightarrow E(\neg q U r))]$$



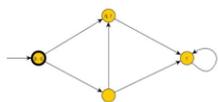
Интерпретации TL –  
системы переходов, в  
каждом состоянии  
которых свой набор  
значений переменных  
<p, q, r>  
(бесконечное число)

Интерпретация K1 - модель формулы  $\Phi$

K – структуры Крипке или

модель  $M=(S, S_0, R, L)$   
базис:  
EX, AF, EU

Структура Крипке



A – always (должно выполняться всегда), G – globally ( истинно во всех будущих состояниях, E – exists ( существует хотя бы одна ветвь, на которой формула истина.

# Modal statement (expression)

1. It snows in winter
2. It **always** snows in winter
3. **Sometimes** it snows in winter

These are different statements. And therefore, they must be written in different formulas. These statements are meaningfully related to each other.

And this should be reflected in the formulas. Since statements differ only in words like - **always, sometimes** (modalities of time - temporal modalities), it is necessary to introduce some kind of logical constructions to **express these modalities**.

## Примеры: deontic modalities - обязан, имею право

1. Students attend lectures
2. Students are required to attend lectures
3. Students have the right to attend lectures

**deontic modalities: I must, I have the right...**

## Примеры: epistemic modalities - I know, I guess (знаю, предполагаю)

1. The problem has a solution
2. It is known that the problem has a solution
3. It can be assumed that the problem has a solution

**epistemic modalities : I know, I guess**

# Modal logic

Modalities express different shades of truth (**confidence** - уверенность, **necessity** - необходимость, **provability** - доказуемость, **awareness** - осознанность)

These shades can be classified:

Modalities of the necessary	Modalities of the possible
necessary - необходимо	possibly - возможно (алетическая логика)
always - всегда	sometimes - иногда (темпоральная логика)
must - должна	have the right - имею право (деонтическая логика)
know - знаю	guess - предполагаю (эпистемическая логика)
□	◇

# Modal Formula Syntax

To express modality we need to add two logical operators:

□ (**necessary** - необходимого)

и

◇ (**possible** - возможного),

with the help of which, it is possible to construct formulas of the following form:

(□φ) «необходимо φ» - “**necessary** φ”

(◇φ) «возможно φ» - “**possible** φ”

# Semantics of modal formulas

The semantics of modal formulas are diverse (or we may say – flickering)

## Пример:

Дана формула  $\Box\varphi \rightarrow \varphi$

Если  $\Box$  — модальность времени (темпоральная логика), «всегда», то

$\Box\varphi \rightarrow \varphi$  — это закон модальной логики.

Если студенты всегда ходят на лекции, то они ходят на лекции.

Если  $\Box$  — деонтическая модальность, «должны», то формула  $\Box\varphi \rightarrow \varphi$  не имеет статуса логического закона.

Если студенты должны ходить на лекции, то они ходят на лекции.

Это не всегда так !

# Axioms

$\Box$  (necessary - необходимого)       $\Diamond$  (possible - возможного),

1.  $\Box\varphi \rightarrow \varphi$  (аксиома рефлексивности T) рефлексивные шкалы

$\forall wR(w,w)$ ;

Если студенты **всегда** ( $\forall$ ) ходят на лекции, то они ходят ( должны быть ) на лекции.

модальность времени (темпоральная логика),

2.  $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$  (4)

транзитивные шкалы  $\forall w_1\forall w_2\forall w_3(R(w_1,w_2)\&R(w_2,w_3) \rightarrow R(w_1,w_3))$ ;

3.  $\Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$

симметричные шкалы  $\forall w_1\forall w_2(R(w_1,w_2) \rightarrow R(w_2,w_1))$ .

4.  $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$  (D) (деонтическая логика)

(If **it should to be** that  $p$ , then **it** is **permitted** that  $p$ )

# Relational semantics

Lets introduce the satisfiability relation for modal formulas:

(Введем отношение выполнимости для модальных формул):

- Пусть  $P = \{P_1, P_2, \dots\}$  -- множество элементарных высказываний.
- Модальная интерпретация состоящая из шкалы Крипке
  - $F \langle W, R \rangle$  ( $W$  -- возможные "миры",  $R$  -- отношение достижимости) и
  - оценки элементарных высказываний  $E: W \times P \rightarrow \{1, 0\}$ .

# Отношение выполнимости

Пусть  $M = \langle W, R, E \rangle$  -- модель Крипке. Тогда отношение выполнимости  $M, s \models p$  формулы  $p$  в мире  $s$  модели  $M$  определяется следующим образом:

1. Если  $p = P_i$  из множества элементарных высказываний, то:

$M, s \models p \Leftrightarrow E(s, p) = 1$ , ( читается так: высказывание  $p$  истинно в мире  $s$  модели  $M$ )

1.  $M, s \models p_1 \wedge p_2 \Leftrightarrow (M, s \models p_1) \wedge (M, s \models p_2)$
2.  $M, s \models p_1 \vee p_2 \Leftrightarrow (M, s \models p_1) \vee (M, s \models p_2)$
3.  $M, s \models p_1 \rightarrow p_2 \Leftrightarrow (M, s \not\models p_1) \vee (M, s \models p_2)$
4.  $M, s \models \neg p_1 \Leftrightarrow M, s \not\models p_1$
5.  $M, s \models \Box p_1 \Leftrightarrow$  для любого альтернативного мира  $w$  если  $\langle s, w \rangle \in R$ , то  $(M, w \models p_1)$
1.  $M, s \models \Diamond p_1 \Leftrightarrow$  существует альтернативный мир  $w$ , что  $\langle s, w \rangle \in R$  и  $(M, w \models p_1)$

Отношение выполнимости однозначно определяется своими значениями на множестве элементарных высказываний.

# Пример

$\diamond$  (possible - возможно),

$\square$  (necessary - необходимо)

$M, w_1 \models \diamond p$  (возможно)

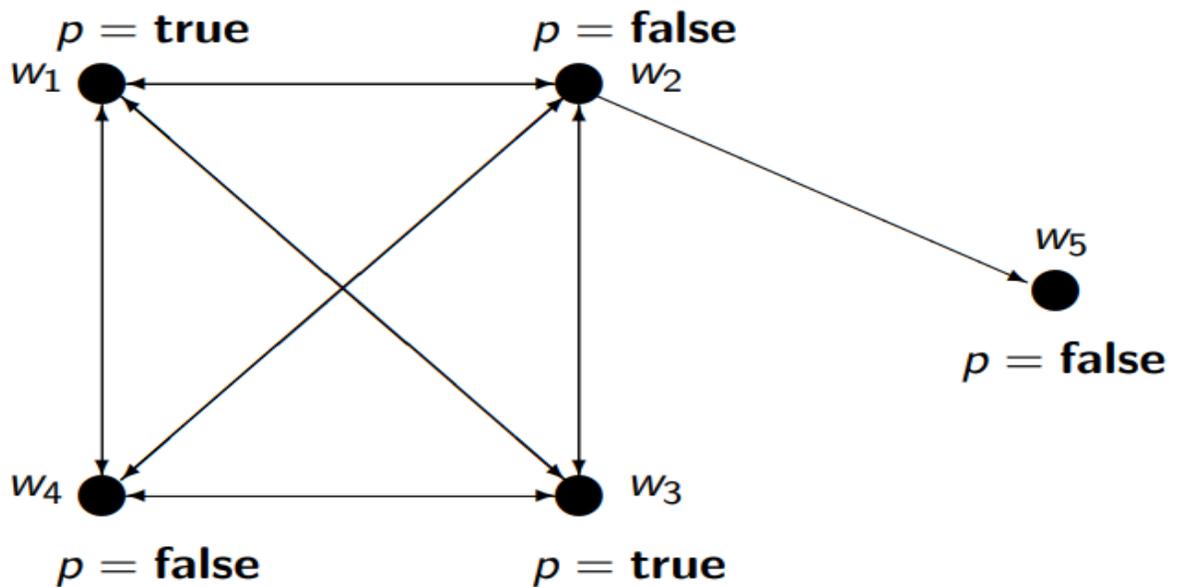
$M, w_1 \not\models \square p$  (необходимо)

$M, w_1 \models \square \diamond p$

$M, w_5 \models \square p$

$M, w_5 \not\models \diamond p$

## Модель Крипке



# Простейшие свойства

$\Box$  (necessary - необходимо)

1.  $\vDash \Box(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \rightarrow (\Box\varphi_1 \rightarrow \Box\varphi_2)$  (аксиома дистрибутивности K);
2.  $\vDash \varphi \Rightarrow \vDash \Box\varphi$  (правило необходимости N).

В разных приложениях **модальность** необходимого может **пониматься по разному**. Отсюда большое разнообразие модальных логик.

В разных модальных логиках отношение выполнимости определяется на разных классах шкал. Каждая разновидность шкал (отношения достижимости R) характеризуется определенным законом (формулой) модальной логики.

## Пример. Эпистемические логики

Эпистемические логики — это разновидности модальных логик, изучающие модальности **знания и мнения** (веры) **идеализированных агентов**.

Интерес представляют вопросы о том, какими знаниям располагает субъект, **насколько он осознает свои знания** (и незнания), и какие причинно-следственные связи возникают между утверждениями, касающимися вопросов знания и веры.

В эпистемической логике модальный оператор

$\Box\varphi$  следует прочитывать «Я знаю, что  $\varphi$ »,

а

$\Diamond\varphi$  — «Я допускаю, что  $\varphi$ »

## Пример. Эпистемические логики

Основные законы (аксиомы) эпистемической логики:

1. Аксиома адекватности знания:  $\Box\varphi \rightarrow \varphi$  («Мои знания верны»)
2. Аксиома позитивной интроспекции:  $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$  («Я вполне представляю все, что мне известно».)
3. Аксиома негативной интроспекции:  $\Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$  («Я вполне сознаю, что именно мне неизвестно».)

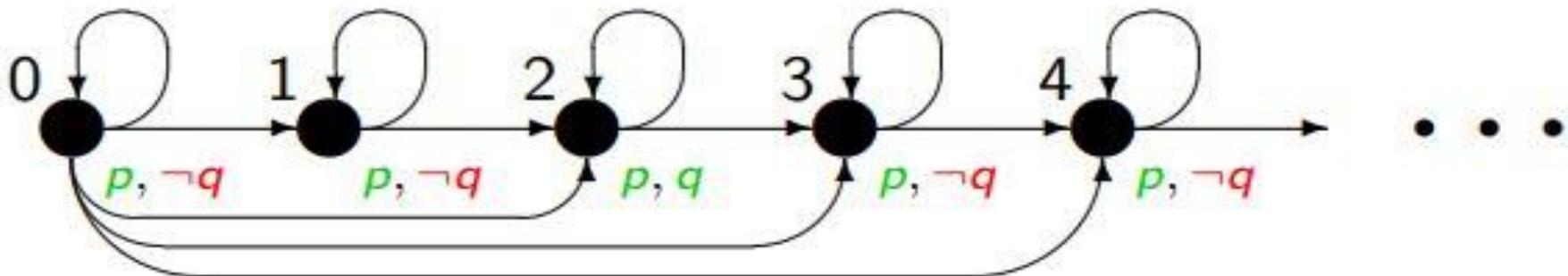
# Пример. Темпоральная логика

Поскольку вычисление — это процесс, развивающийся во времени, состояния которого находятся в причинно-следственной связи друг с другом, темпоральные логики используются для спецификации и верификации программ.

Логика линейного времени LTL

Шкала Крипке для LTL (Linear Temporal Logics) — это натуральный ряд с естественным отношением порядка:

$I, 0 \models \Box p$ ;  $I, 0 \not\models \Box q$ ;  $I, 0 \models \Diamond q$

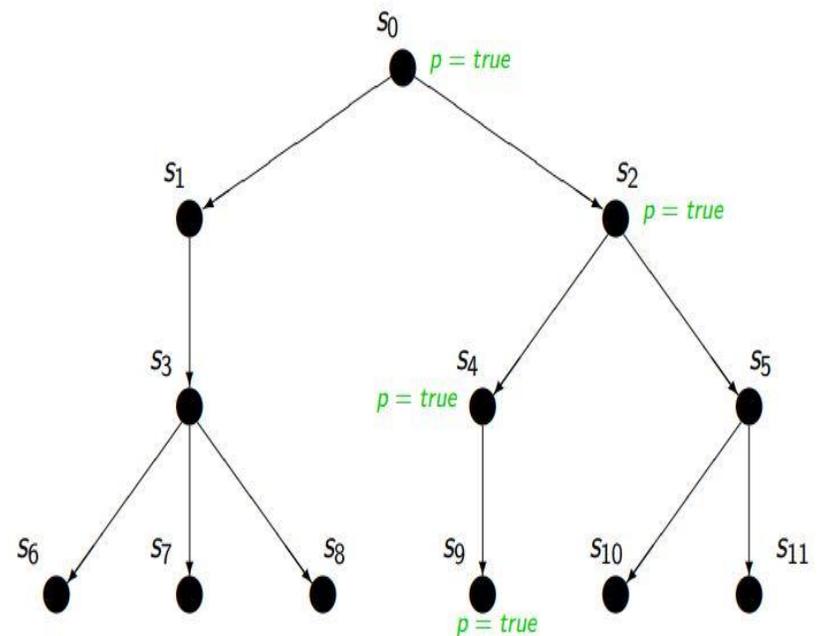
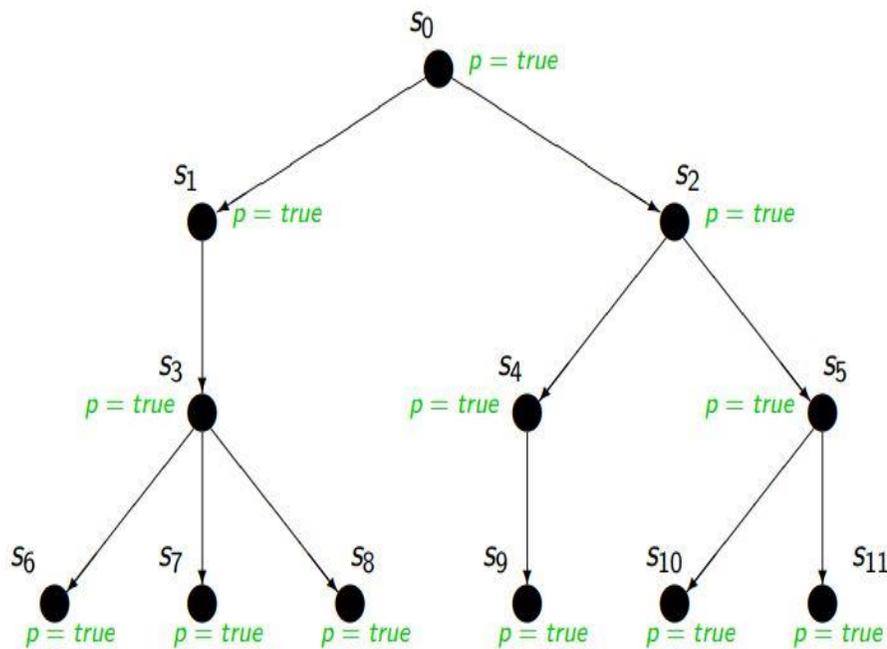


# Пример. Темпоральная логика

В других темпоральных логиках время — это ветвящаяся структура; в каждый момент времени может быть несколько альтернатив дальнейшего развития событий. Одной из логик ветвящегося времени является логика деревьев вычислений (CTL, Computational Tree Logic), используемая для спецификации и верификации распределенных программ

$$I, s_0 \models \forall \square p$$

$$I, s_0 \models \exists \square p$$



# Пример. Темпоральная логика

Пусть  $M = \langle W, R, E \rangle$  -- древесная модель Крипке для логики CTL.  $s \in W$  одно из состояний модели. Тогда:

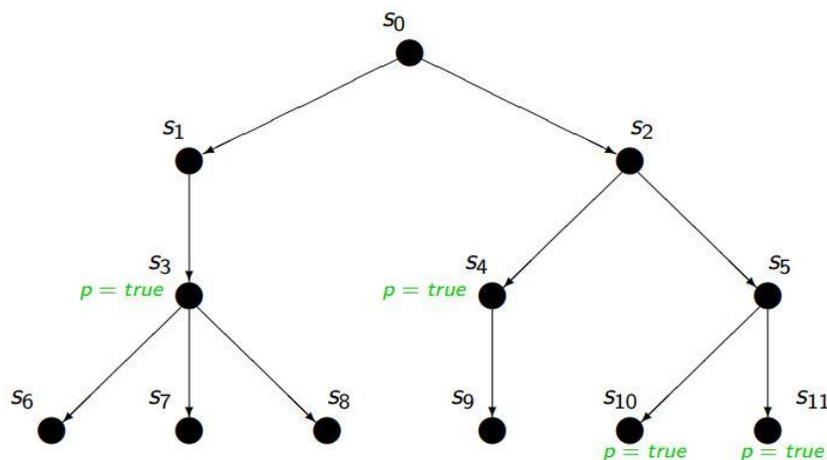
$I, s \models \forall \square p$   $\equiv$  в каждом состоянии  $s_1$ , достижимом из состояния  $s$ , верно  $I, s_1 \models p$

$I, s \models \exists \square p$   $\equiv$  существует ветвь, исходящая из состояния  $s$ , в каждом состоянии  $s_1$  которой верно  $I, s_1 \models p$

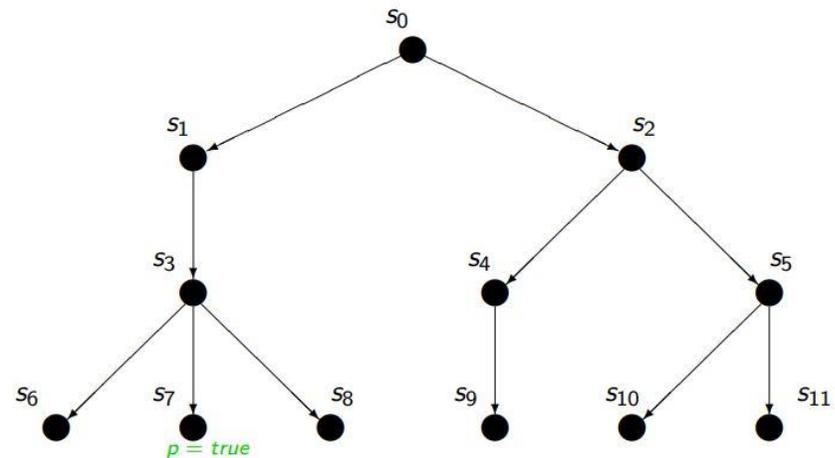
$I, s \models \forall \diamond p$   $\equiv$  в каждой ветви, исходящей из состояния  $s$ , есть состояние  $s_1$ , в котором верно  $I, s_1 \models p$

$I, s \models \exists \diamond p$   $\equiv$  существует ветвь, исходящая из состояния  $s$ , в одном из состояний  $s_1$  которой верно  $I, s_1 \models p$

$I, s_0 \models \forall \diamond p$



$I, s_0 \models \exists \diamond p$



# Conclusion

- В дальнейшем надо связать модальность и вероятность