КАФЕДРА ТЕЛЕМАТИКА

Санкт-Петербургский
Государственный
Политехнический
Университет

Институт прикладной
математики и механики

Физика вычислительных процессов

Лекция 7-2

От «науки о данных» к теории алгоритмов и...новым p-adic числам

12 Мая 2020 г.

Что мы обсуждали : Data Science & физические процессы & фальсифицируемость теорий

Объекты реальности – неисчерпаемый «резервуар» математических идей

Символы или имена объектов и их свойства могут изменяться, а факты – опровергать гипотезы

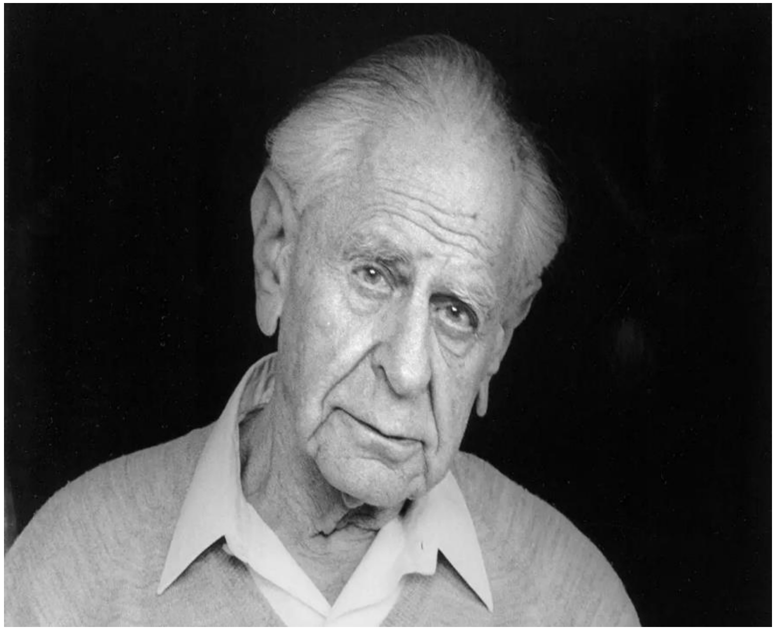
Основное требование к (компьютерным) наукам - их фальсифицируемость !?

Почему фальсифицируемость? Процессы в реальном мире различны и сложны. Математика – лишь метафора (Ю. И. Манин), которая суть **формальная интерпретация**, которая не отражает контекста использования – > необходима **когнитивная интерпретация**. Мы уверены, что 2+2 =4, а не 0 или 22 ? Почему ?

Принцип фальсифицируемости теории К. Попера

При верификации гипотезы ищутся подтверждающие примеры,

при фальсифицируемости ищутся примеры, опровергающие гипотезу.



Итого: Научная теория не может быть принципиально неопровержимой – мир сложнее формальных теорий - истина в неполноте , а значит м.б. формально противоречива (К. Гедель).

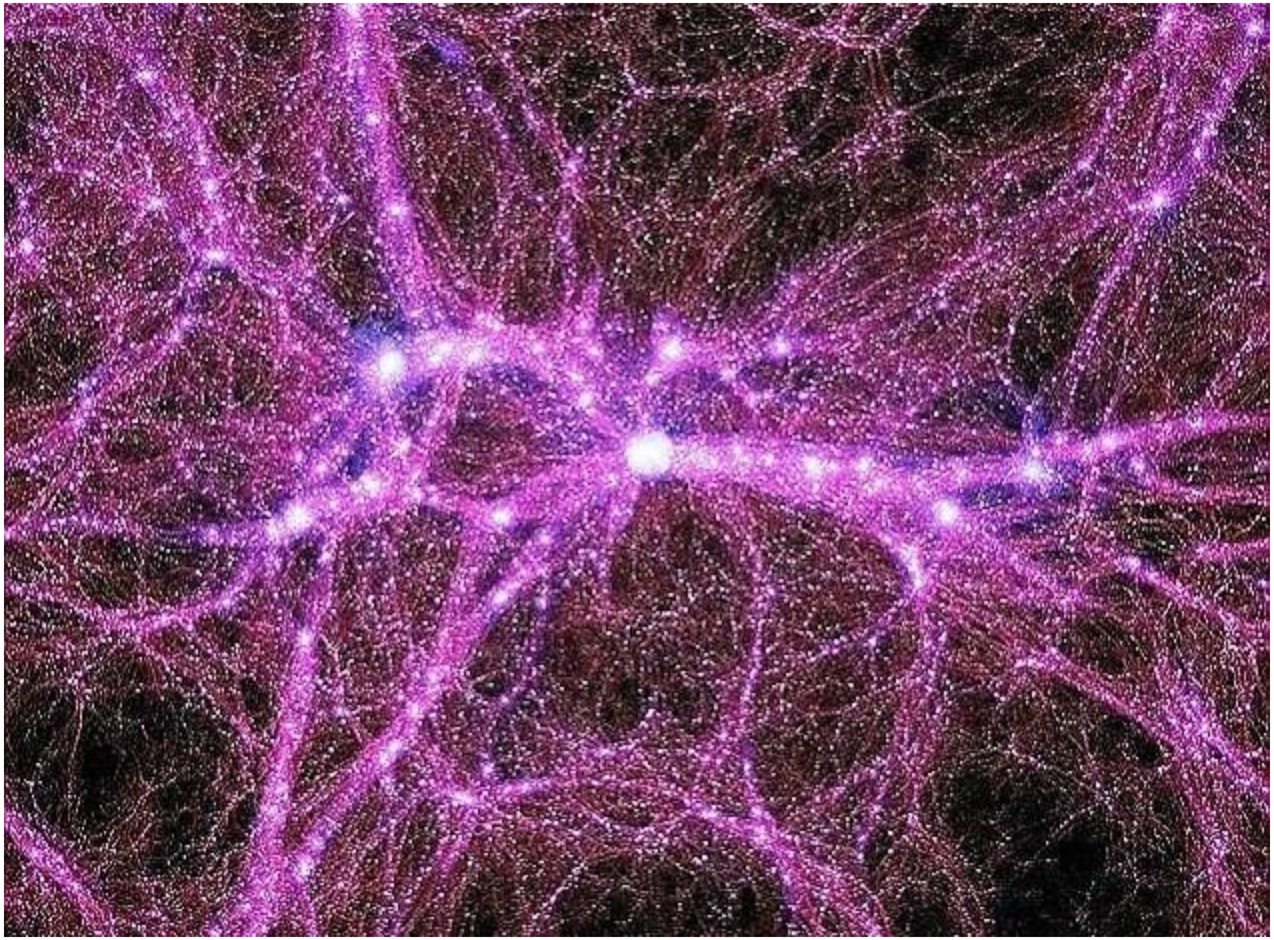
Общие комментарии

- Попытка представить Вселенную как «большую» машину Тьюринга – программный автомат, несостоятельны. Модель вычислений, реализуемая в современных компьютерах не адекватна тому, что происходит в физической реальности, хотя бы в силу «непрерывности» протекающих макро физических процессов.
- Нотация «вычисления» **должна быть обобщена** так, чтобы отражать всю широту физических явлений, обнаруживаемых в окружающей нас реальности.
- В новой модели вычислений не должно быть противопоставления «дискретного» и «непрерывного». Нужны новые модели вычисления реальности:

  на одном из уровней вычислительных абстракций надо уметь оперировать непрерывными (качественными) сущностями, а дискретность «сохранить»

  на уровне манипуляции с первичными и уже обработанными данными .

Вселенная vs машина Тьюринга



Все ли, что может вычислить «машина Тьюринга» , существует где-то во Вселенной ?
Объект компьютерных наук (что изучается) – информация, Предмет – процесс ее изменения

Вопрос: можно ли «движение материи» рассматривать процесс вычислений ?

Дано: каждый атом и каждая элементарная частица материи содержат не только энергию $E=mc^2$, но биты информации, а каждый раз, когда два атома или две частицы сталкиваются, эти биты меняют свои значения.

- Квантовое «цифровое» состояние материи может рассматриваться как код-программы движения физической материи, который управляет изменением информации, т.е. формированием неоднородностей в «объектах» физической реальности

Итого: Все физические системы содержат информацию , а движение материи – можно рассматривать как процесс вычислений , т.е. изменение информации, но не под «воздействием» механического процесса перемещения ленты в машине Тьюринга, а в результате квантового механического процесса.

Структуры и процессы преобразования данных

- Способность Вселенной к вычислениям объясняет одну из величайших тайн природы: как из очень простых законов физики возникают сложные системы, например живые существа.
- Квантово-вычислительная природа Вселенной такова, что конкретные детали будущего (результаты вычислений) всегда остаются непредсказуемыми – т.е. фальсифицируемы (К.Попер). Единственный способ «заглянуть в будущее» – подождать и посмотреть, что произойдет.

Не все данные – носители информации. Только Computation позволяют

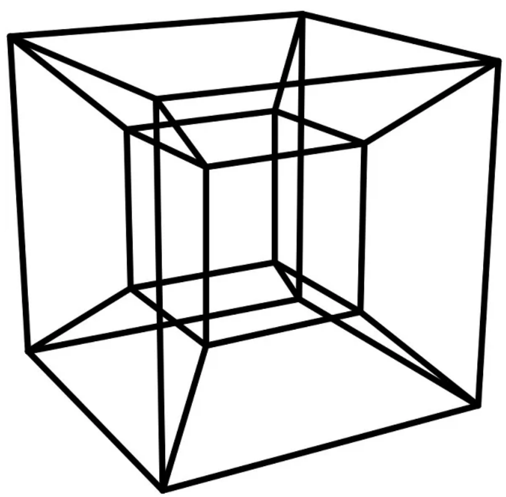
- Extracting the understandable form of data (we can understand)
- Reducing the data (eliminating redundant information)

Фальсифицируемость «цифровых» моделей

- На масштабах порядка одного метра: 1 м ≈ $6{,}25 \cdot 10^{34}$ планковских длин

  Вселенная имеет **три** пространственных измерения и **одно** временное измерение - это единая форма описания материи ?

- Нет - на масштабе 1 планковской длины, пространство-время перестает быть «гладким», и могут существовать уже не четыре измерения, а ... 11 измерений, как это вытекает из так называемой теории **суперструн**. Время – вектор какой размерности ?!!



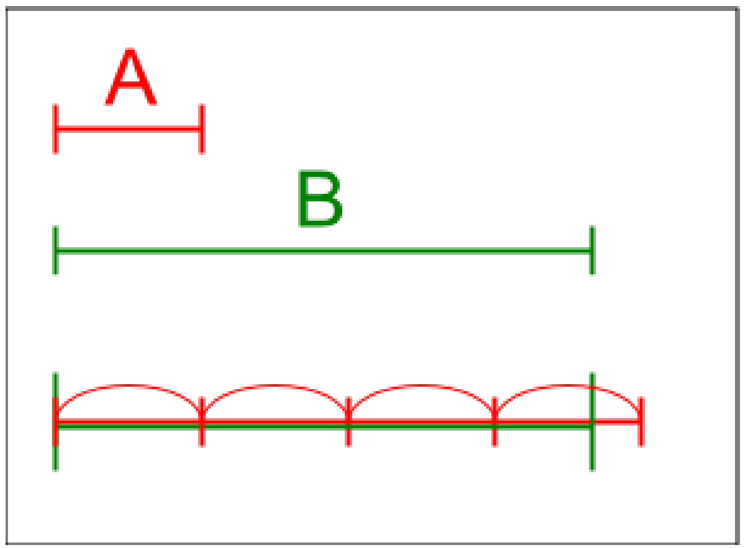
https://zen.yandex.ru/media/la_star/kak-legko-poniat-chetyrehmernoe-prostranstvo-5da42c8a32335400b18f2523

«Математика есть наука о бесконечном»

Карл Вейерштрасс (1815-1897)

Аксиома Архимеда

Аксиомой Архимеда называется такое утверждение: если даны два отрезка: А (масштаб) и В (объект измерения) , то можно так несколько раз отложить отрезок А, что их сумма будет равна или «немного» превосходить отрезок В ,



С точки зрения геометрии (принятой в современных учебниках), это утверждение тривиально: АРХИМЕДОВО ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ **одномасштабно**, т.е. «делимо и однородно».

Проблема Кука (1971)

Математика используется для изучения **объектов природы** с помощью решения **задач на числовые значения**. Но для этого сами физические «объекты» должны быть «простыми» , т.е. обладать свойствами:

- Однородности
- Делимости

Вопрос :

- проблема Кука: может ли **проверка правильности** решения математической задачи быть более длительной, чем само **получение решения**, независимо от алгоритма вычислений?
- все ли закономерности реального мира обладают свойствами однородности и делимости?

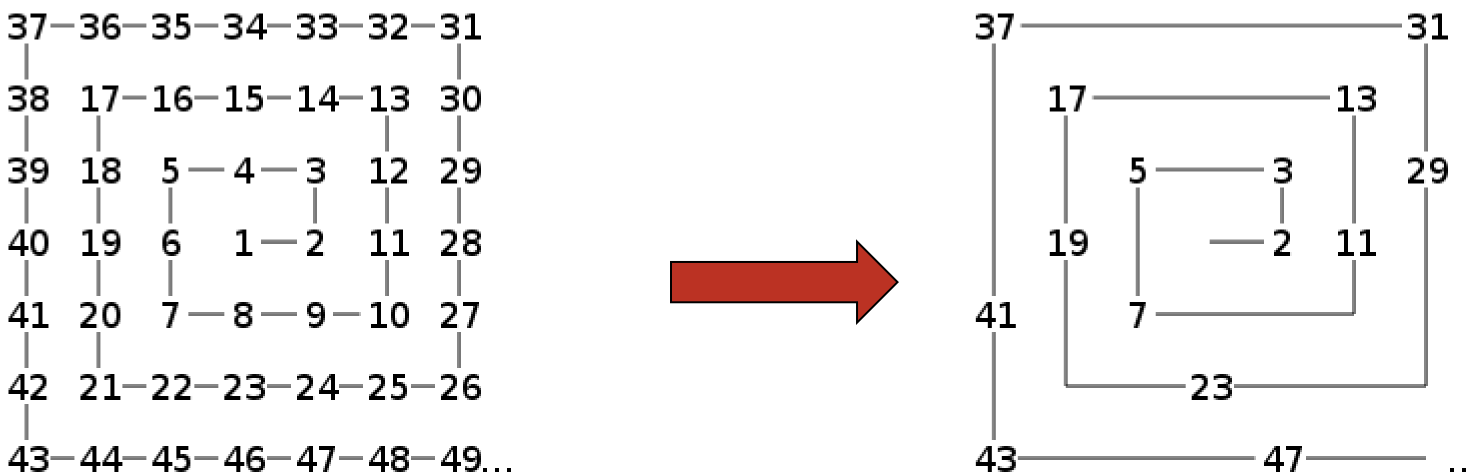
Проблема Кука известна как "Равенство классов P и NP» - равенство P и NP означает, что все задачи которые легко можно проверить, можно также и легко решить (быстро)

«Метафизические» факты теории чисел

- Если число **111 111 111** умножить на самого себя, то получится число **12 345 678 987 654 321** (это структура символов, которые являются носителем «странных» математических свойств».
- Понятие "отрицательное число" ввел впервые купец из Италии по фамилии Пизано в 1202 году, обозначив им свои задолженности и убытки. Физические «**убыток» – это отсутствие «объекта**» – как описать то, что не существует в реальности ?
- Число гугл это единица и сто нулей. Название этому числу дал математик Эдвард Каснер. Во всей видимой Вселенной нет такого количества различимых объектов, хотя число **гугл** «существует» !?

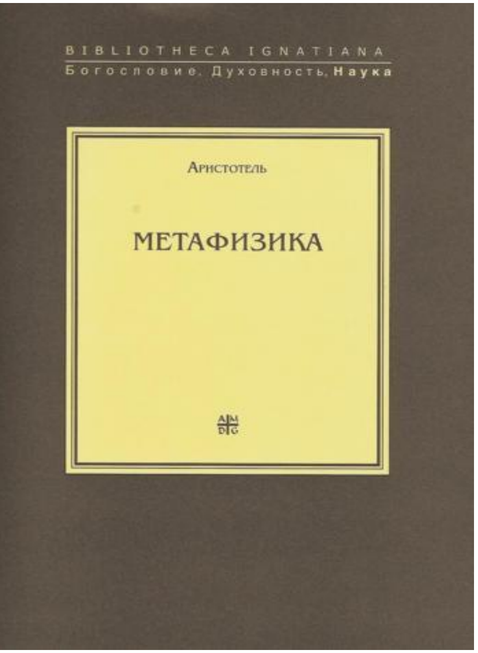
Структура реальности – метафизика «простых чисел»

Факт: Если записывать целые числа по спирали, простые числа выстраиваются в этой структуре вдоль диагональных линий



Т.н. скатерть Станислава Улама – это структура, которая имеет «пространственное представление», значит она **материальна**, но состоит из «**нематериальных**» объектов ! ?

«Числология»: числа как «метафизическая» первооснова Мира



Античные ученые были озабочены поисками какого-либо принципа «деления», упорядочивающего Вселенную.

Возникла «**числология**» Пифагора как наука. Открытие пифагорейцами музыкальных интервалов навело на мысль, что в основе гармонии может лежать **математическая сущность**.

Также возникла «**нумерология**» Корнелия Агриппы, но … как магия.

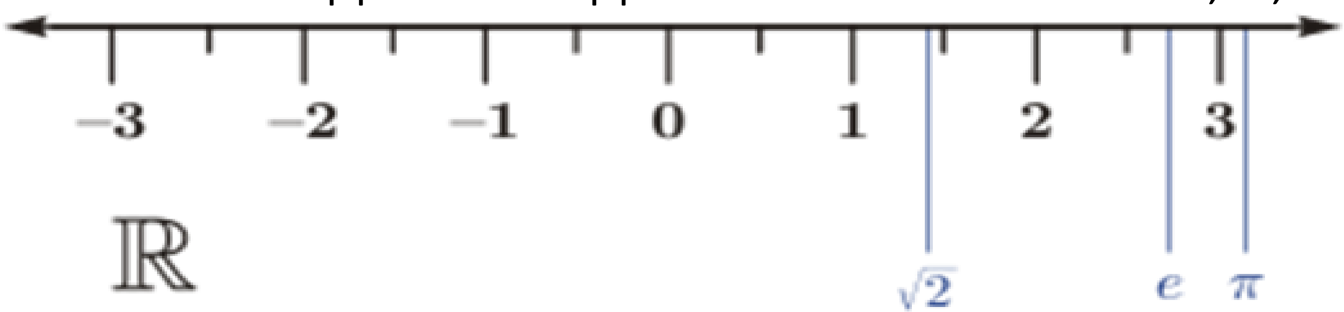
Вопросы о свойствах чисел:

- Пифагор (550 г. до н.э.) Сколько целых чисел (в современной терминологии информации) требуется для того, чтобы описать Вселенную целиком?
- Аристотель. Если всё знать нельзя, то но можно ли познать причины?
- (21 век) Можно ли «уместить» описание Мира в памяти компьютера?

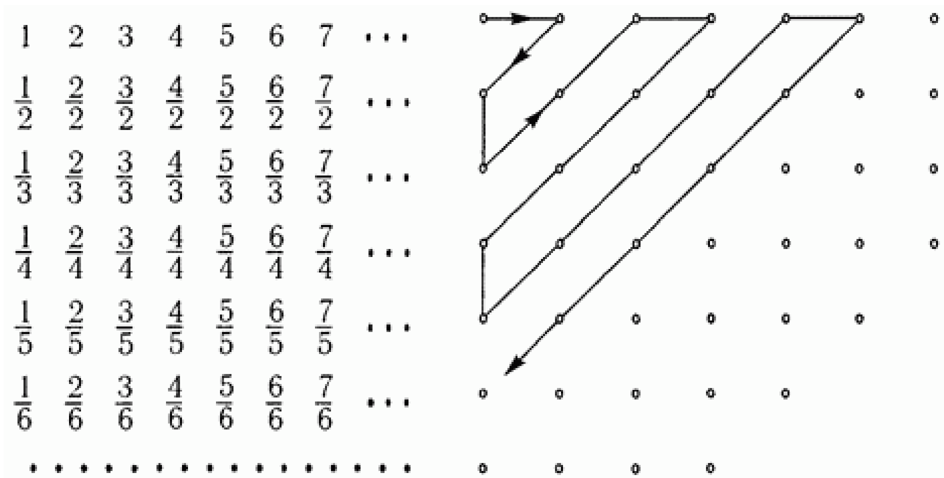
Число -как мера упорядоченных множеств

- **Аристотель**: «вся Вселенная — гармония и **число**»
- **Пифагор**: «познать мир означает познать лежащие в основе его гармонии **числа**»
- **М. Тегмарк**: «**число** и есть реальность» , см. Tegmark, M. The Mathematical Universe // Foundations of Physics, v. 38, № 2, 2008.

АРХИМЕДОВА МЕТРИКА ДЛЯ УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ: >, < , =



Рациональные числа – «архимедова» метрология физических процессов



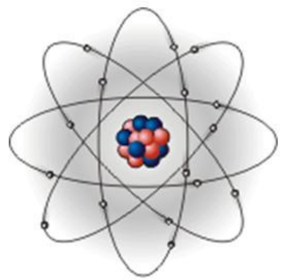
Мера физических процессов выражается через рациональные числа Q. Таких числе бесконечно много, но ….. они располагаются **неплотно** – между ними находятся вещественные числа R.

Если Природа на разных масштабах описывается разными теориями, то должны существовать и «разные» числа.
111, 00000000…. - это рациональное число 111 !

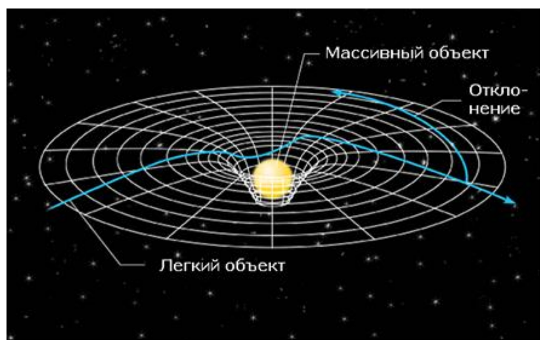
….111111, 000 - а это что за число?

Две основополагающие теории – два типа чисел для исчисления меры упорядоченности объектов Природы

Две основополагающие теории XX века — **квантовая теория –** мир **дискретен**, состоит из квантов и атомов



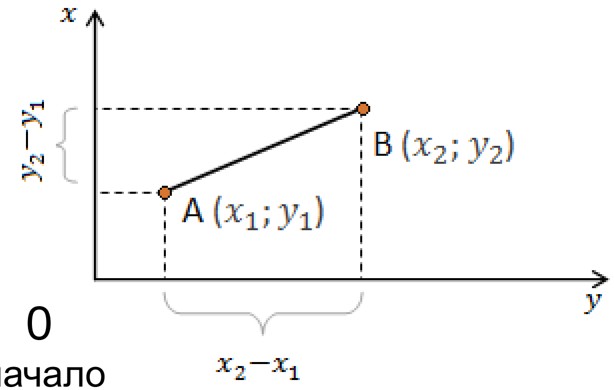
и **общая теория относительности** – мир непрерывен



описывающая макромир звезд и планет в терминах гравитационного искривления пространства-времени.
Эти теории являются взаимно исключающими взглядами на Природу.

Мера-число vs мера - расстояние

Арифметическое пространство

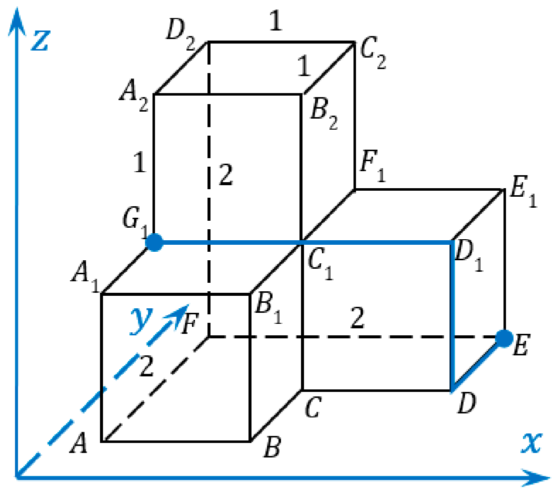


Есть начало отсчета – центр

$$x = p^{\gamma}\,\frac{m}{n}$$

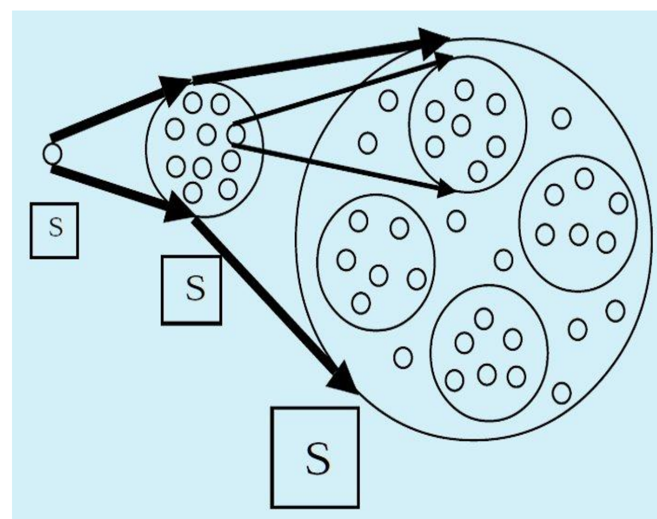
$$A(x_1; y_1)\ \ B(x_2, y_2)$$

$$\rho(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$



Сложные иерархические структуры

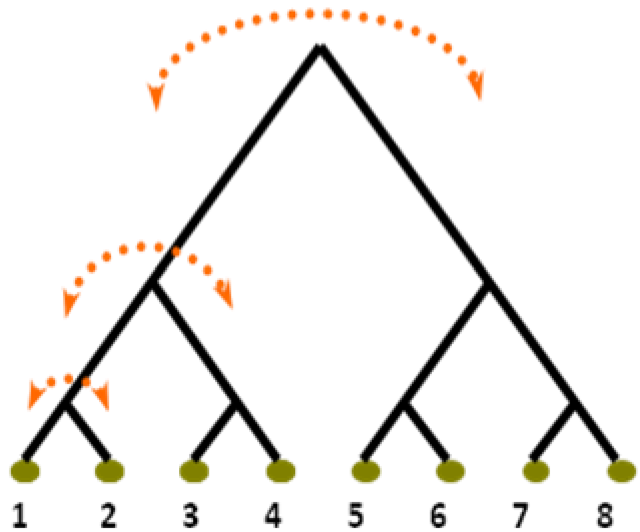
Нет общего начала отсчета – центр «везде»

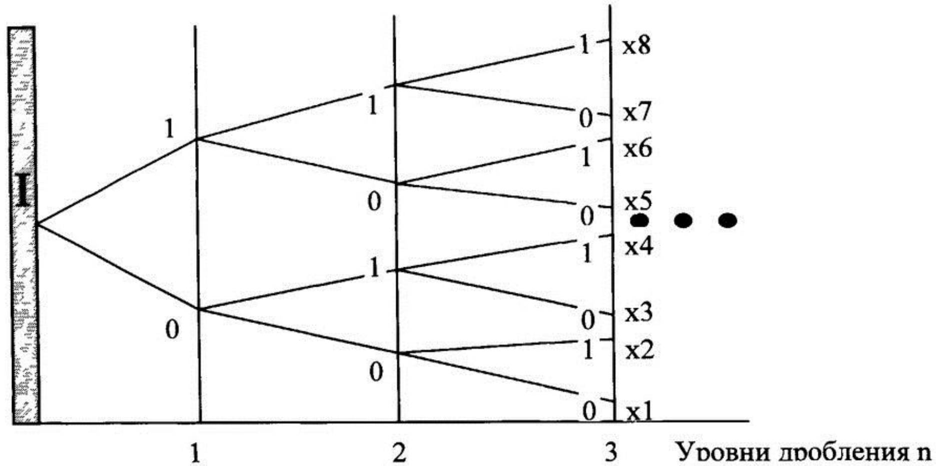


Как измерить расстояние в пространстве, которое имеет ограничения ?

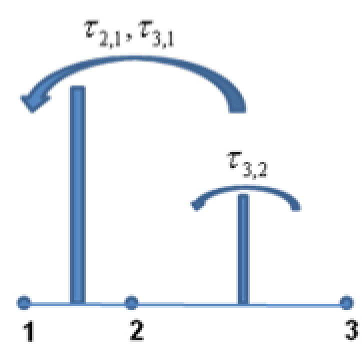
Иерархическая структура – расстояние как ультраметрика

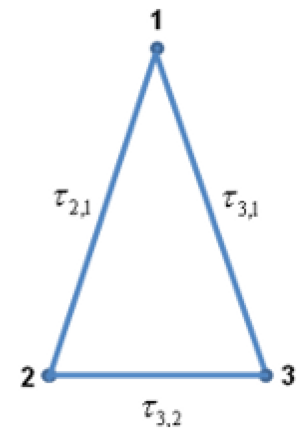
Как определить расстояние между точками 1,2,3 ?





Фиг.1





Концепция «близости» 10-адических чисел

- Для десятичных чисел их «близость» в **10-адическом смысле** вычисляется как мера, выраженная через отрицательную степень числа 10 (как результат деления)
- Пример. Числа 3333 и 4333, отличаются на 10^3, поэтому их «близость» есть $1/10^3$, а числа 33333333 и 43333333 отличающиеся на 10^7, поэтому они более «близки» друг к другу, так как мера их близости есть $1/10^7$

Let the 10-adic norm of *r* to be

$$|r|_{10} = \frac{1}{10^e}$$

$|0|_{10} = 0.$

Пример: вычисление 10-адической меры числа

$$9 = -1 + 10 \qquad |9 - (-1)|_{10} = \frac{1}{10}$$

$$99 = -1 + 10^2 \qquad |99 - (-1)|_{10} = \frac{1}{100}$$

$$999 = -1 + 10^3 \Rightarrow |999 - (-1)|_{10} = \frac{1}{1000}$$

$$9999 = -1 + 10^4 \qquad |9999 - (-1)|_{10} = \frac{1}{10000}$$

Теория: Кольцо целых, поле вещественных и p-адических чисел

- Вещественное число определяется как *бесконечная* ***справа*** *десятичная дробь*, то есть выражение вида

$$\pm a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

- Можно ли построить число, у которого «бесконечность» **слева**?

Р-адические числа, р= 2, 3, 5, 7, 11, …

9
99
999
…..
…9999

Бесконечные последовательности цифр 0,1,2, …9

Ряд **9, 99, 999**. … → -1

3, 33, 333, … → -1/3

Пример операций

… 9 9 9 9
+
….0 0 0 1

…0 0 0 0

Значит , ….9999 = -1 ?

…3 3 3 3
x
…0 0 0 3

…9 9 9 9
Значит , …3333= -1/3 ?

В каком смысле сходится эти последовательности ?

2-адические числа

Пример,
….. 1111 =-1 в Z_2
$-1=1x2_0+1x2^1+1x2^2+1x2^3$

…01010101 = -1/3 в Z_3

$-1/3=1x2^0+0x2^1+1x2^2+0x2^3$

Доказательство

….1 1 1 1
+
….0 0 0 1

….0 0 0 0

Итак,
…00011=3
а
…11100=-4
$-4 = 0x2^0+0x2^1+1x2^2+1x2^3$
$-4=(-1)x2^2$
$-1=1x2^0+1x2^1+1x2^2+1x2^3$

Еще пример

В отличии от традиционных целых чисел, для которых «величина» определяется **«удаленностью» от нуля**, «величина» p-adic числа определяется с помощью **p-adic нормы,** где положительные степени p имеют меньший «вес», чем отрицательные.

$$\frac{5^2-1}{3} = \frac{44_5}{3} = 13_5; \ \frac{5^4-1}{3} = \frac{4444_5}{3} = 1313_5$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} = \ldots 1313_5$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3} = \ldots 1313_5 \times 2 = \ldots 3131_5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} + 1 = \ldots 3132_5.$$

Пояснение: 5^2-1=24=4x5^0+4x5^1

24_{10}=44_5 /3=13_5
24/3=8_{10}
8= 13_8=1x5^1+3x5^0

Пример

$$-100 = -1 \times 100 = \ldots 9999 \times 100 = \ldots 9900$$

$$\Rightarrow -\left(3 + \frac{1}{2}\right) = \frac{-35}{10} = \frac{\ldots 9965}{10} = \ldots 9996.5$$

$$\Rightarrow -35 = -100 + 65 = \ldots 9900 + 65 = \ldots 9965$$

Представление p-адических чисел и их норма

$$|x| = p_1^{a_1} \ldots p_r^{a_r}.$$

$|x|_p = p^{-n}$

Пример:
$x = 63/550 =$
$2^{-1} \cdot 3^2 \cdot 5^{-2} \cdot 7 \cdot 11^{-1}$

$$|x|_2 = 2$$

$$|x|_3 = 1/9$$

$$|x|_5 = 25$$

$$|x|_7 = 1/7$$

$$|x|_{11} = 11$$

$$|x|_{\text{any other prime}} = 1.$$

$$d_p(x,y) = |x-y|_p$$

Р-адическая норма и ультраметрическое расстояние

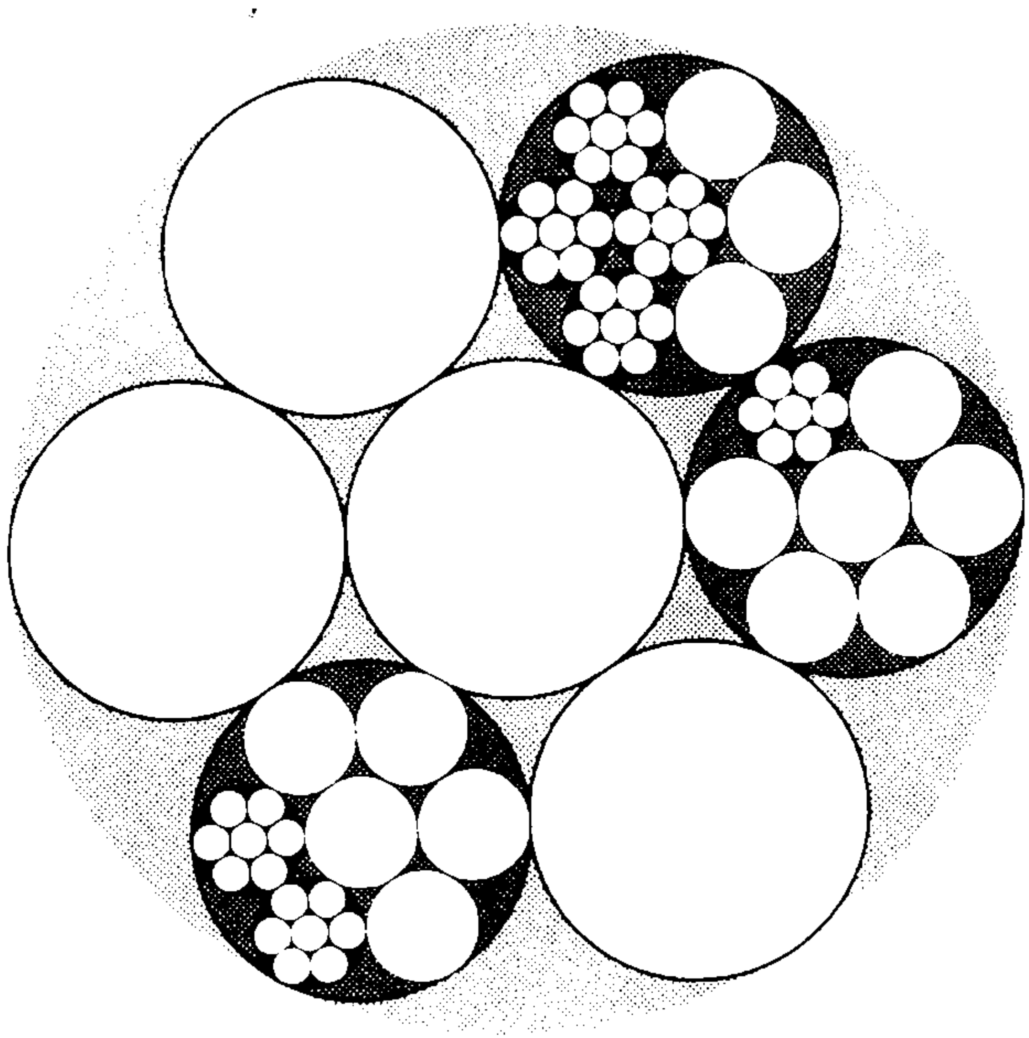
Р-адическая норма **измеряет** на какую степень р делится рациональное число. Норма числа считается тем меньше, чем больше эта степень. Если степень стремится к бесконечности, то норма стремится к нулю. Пример:

$|2|_2=1/2$ $|2|_3=1$

Ультраметрическое расстояние, выражается через р-адическую норму

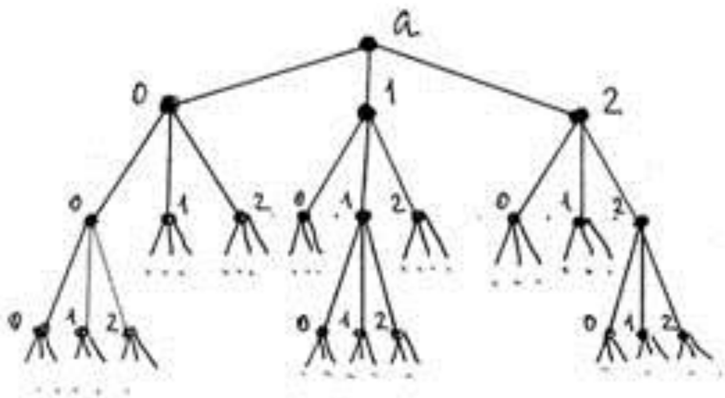
$$|X+Y|p <= \max(|X|_p\ , |Y|_p\ )$$

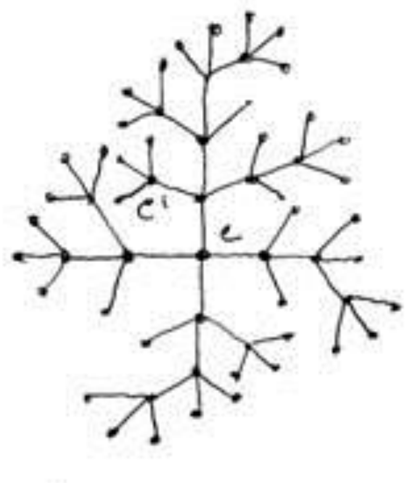
Ультраметрика иерархических структур

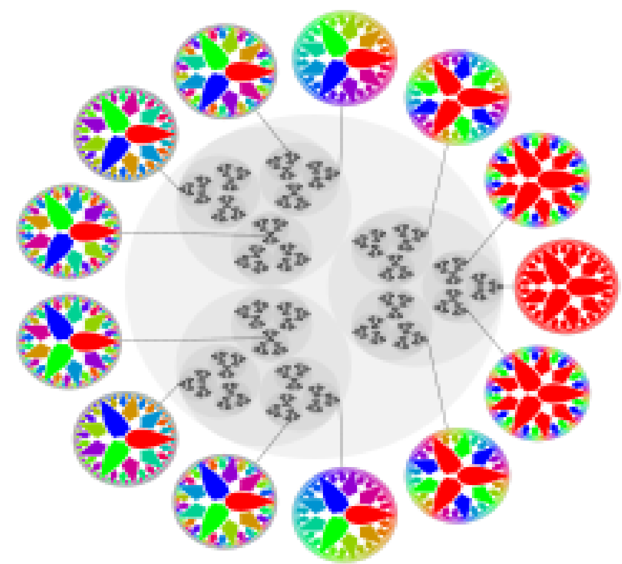


P=7

Виртуальный мир неархимедовых структур (p=3)



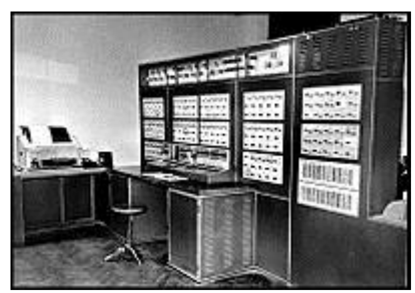




Троично-симметричная система представление отрицательных числе

- Наличие положительной и отрицательной цифр позволяет непосредственно представлять как положительные, так и отрицательные числа.
- При этом нет необходимости в специальном разряде знака и не надо вводить дополнительный (или обратный) код для выполнения арифметических операций с отрицательными числами.
- Все действия над числами, представленными в троичной симметричной системе счисления выполняются естественно с учётом знаков чисел. Знак числа определяется знаком старшей значащей цифры числа: если она положительна, то и число положительно, если отрицательна, то и число отрицательно.
- Для изменения знака числа надо изменить знаки всех его цифр. Примеры:

$$\bar{1}01 = -9 + 1 = -8$$



ЭВМ Сетунь

Система остаточных классов

Система остаточных классов (СОК) (от англ. *Residue number system*, другое название Модулярная арифметика) — непозиционная система счисления. СОК определяется набором взаимно простых модулей $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, называемых базисом, с произведением так, что каждому целому числу из отрезка от 0 до M-1, где M = $m_1 x m_2 x \ldots x m_n$ ставится в соответствие набор вычетов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ где

$$x_1 \equiv x \pmod{m_1};$$
$$x_2 \equiv x \pmod{m_2};$$
$$x_n \equiv x \pmod{m_n}.$$

Рассмотрим СОК с базисом (2;3;5). В этом базисе можно взаимооднозначно представить числа из промежутка от 0 до 29, так как M = 2x3x5 = 30.

Представление чисел в СОК (базис 2,3,5)

0=(0;0;0) 1=(1;1;1) 2=(0;2;2) 3=(1;0;3)
4=(0;1;4)
5=(1;2;0) 6=(0;0;1) 7=(1;1;2) 8=(0;2;3)
9=(1;0;4)
10=(0;1;0) 11=(1;2;1) 12=(0;0;2) 13=(1;1;3)
14=(0;2;4)
15=(1;0;0) 16=(0;1;1) 17=(1;2;2) 18=(0;0;3)
19=(1;1;4)
20=(0;2;0) 21=(1;0;1) 22=(0;1;2) 23=(1;2;3)
24=(0;0;4)
25=(1;1;0) 26=(0;2;1) 27=(1;0;2) 28=(0;1;3)
29=(1;2;4)

Система счисления Бергмана

1957 г. Джордж Бергман ввел в рассмотрение позиционную систему специального типа, названную им «системой счисления с иррациональным основанием» или «t -системой». В этой системе любое действительное число A может быть представлено в виде следующей суммы:

$$A = \sum_i a_i \tau^i$$

где a_i – двоичные цифры, 0 или 1 (i = 0, ± 1, ± 2,), t i – вес i-й цифры, t =

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

основание системы счисления.

Система счисления Бергмана

Например, рассмотрим двоичную кодовую комбинацию 100101, которая представляет собой следующее действительное число:

$$A = 100101 = t^5 + t^2 + t^0.$$

$$A = 100101 = \frac{11 + 5\sqrt{5}}{2} + \frac{3 + \sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{16 + 6\sqrt{5}}{2} = 8 + 3\sqrt{5}.$$

Это иррациональное число , котрое представлено кодовой комбинацией 100101, состоящей из конечного числа бит!

Выводы

- «Целые числа сотворил господь бог, а все прочее – дело людских рук». Леопольд Кронекер (1823 – 1891)
- Компьютеры – программные автоматы построенные как машины Тьюринга быстрее выполняют операцию сложения, чем умножение , а автоматы построенные на СОК быстрее выполняют операции умножения, чем операции сложения.
- Пока не ясно, в какой же системе счисления (позиционной или непозиционной) работают «компьютеры Природы» ?