



КАФЕДРА
ТЕЛЕМАТИКА

Санкт-Петербургский
Государственный
Политехнический
Университет

Институт прикладной
математики и механики

**История и методология математики и
компьютерных наук**

Лекция 7

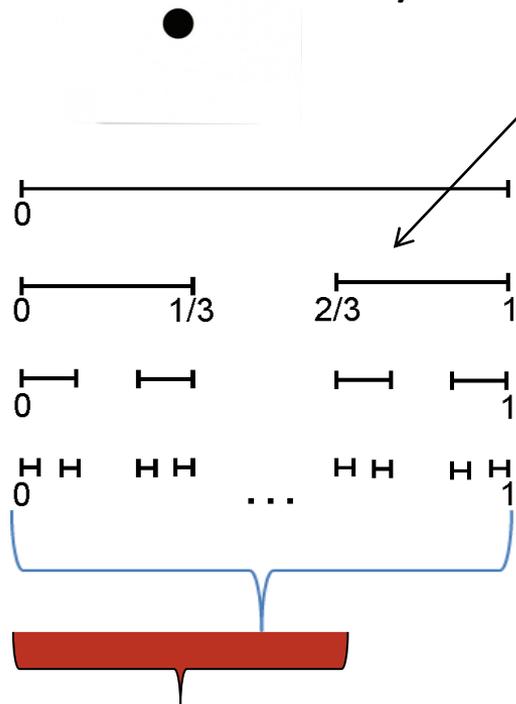
**Метрики и геометрии
пространственных объектов и их
компьютерные модели**

5 ноября 2020 г.

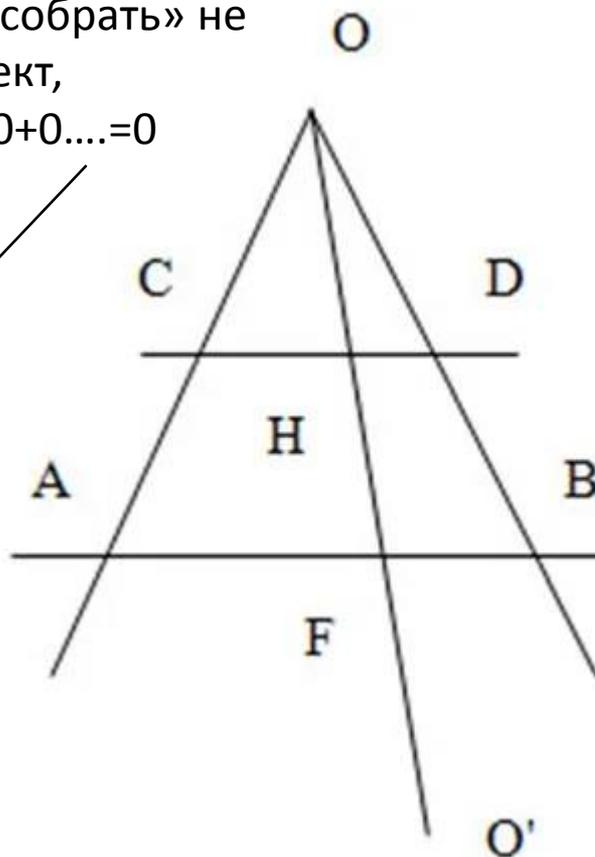
Что было отмечено на прошлой лекции

Из нульмерных объектов, каким является математическая **точка**, нельзя «собрать» не нульмерный протяженный объект, например **отрезок**? Всегда: $0+0+0+\dots=0$

Но $a/0 = \infty$



любое счётное объединение множеств меры 0, дает множество меры 0



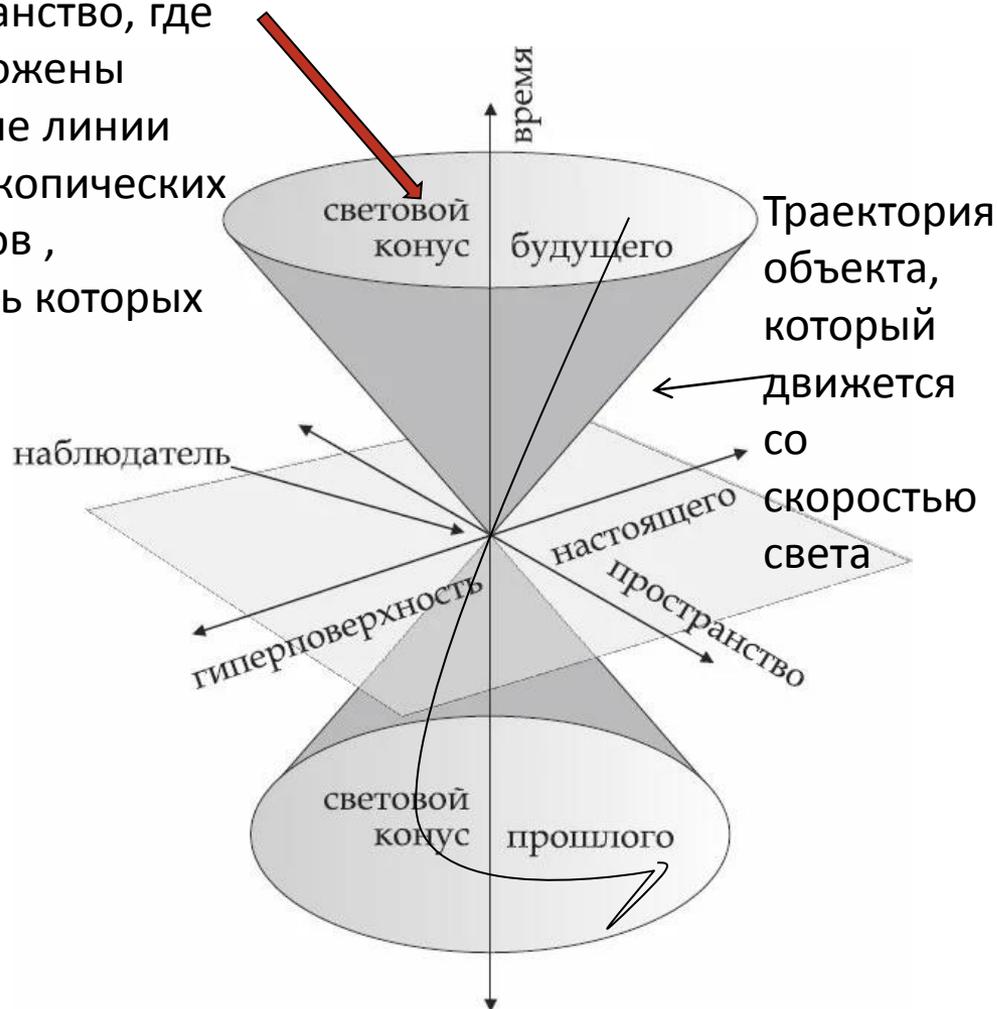
Количество точек на **AF** и **CH** одинаково – их число не меняется

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

Это противоречие свойственно для всех хаусдорфовых пространств, к которым относятся все метрические пространства, в том числе **евклидово пространство**

Структура 4-х мерного пространства-времени

Пространство, где
расположены
мировые линии
макроскопических
объектов,
скорость которых
 $v < c$



Мировая линия в теории относительности — суть кривая в «пространстве-времени» Минковского, описывающая движение объекта (материальной точки) или геометрическое место всех событий, связанных с существованием этого объекта. Нормированный касательный вектор к мировой линии объекта называется «4-х скоростью» и лежит внутри той части светового конуса, которая описывает «будущее».

Метрика и геометрия пространств

- Метрика определяет геометрию (гео – метрия) пространства, Суть геометрии это в первую очередь измерения длины (площади, объема...) объектов в пространстве.
- Если расстояние от начала координат $O(0, 0)$ до точки в пространстве можно найти с помощью декартовых координат $A(x, y)$ по теореме Пифагора:

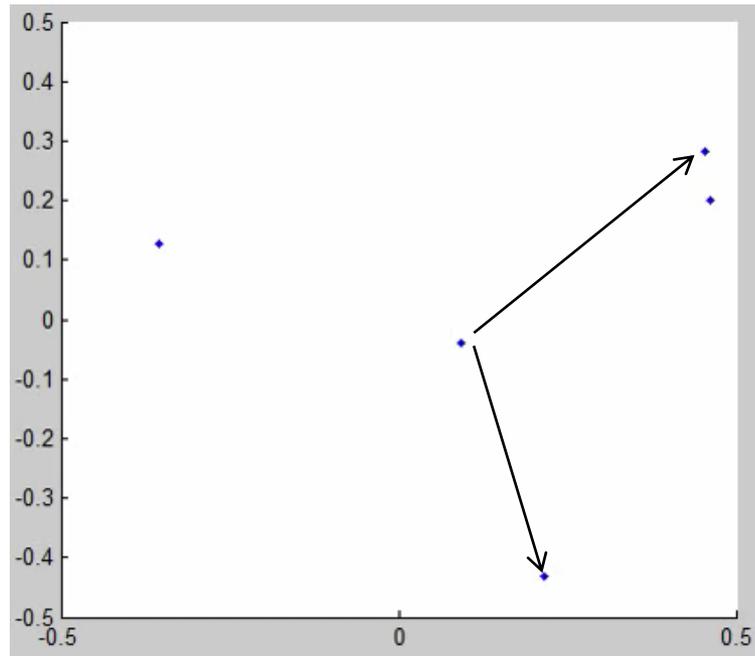
$$d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

то пространство имеет (наделено) метрику Евклида.

- Итак, любые геометрические фигуры есть просто множества точек, а определение окружности: геометрическое место точек, удаленных на **одинаковое расстояние** от одной точки — центра окружности.
- Но существуют различные геометрии, которые определяются заданием той или иной метрики. Переместим окружность в т.н. Манхэттенскую геометрию:

Пример: точки, случайно расположенные на 2D плоскости

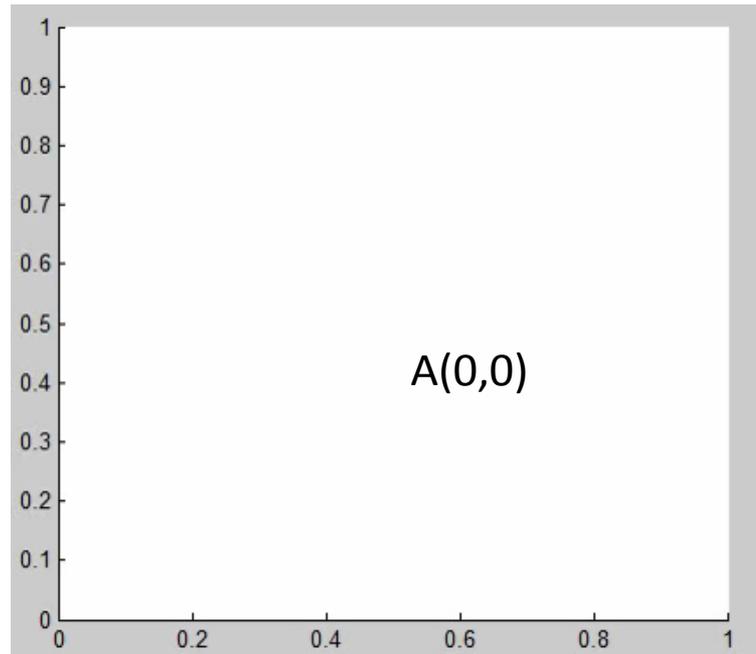
5



Любые геометрические фигуры есть некоторое упорядоченное множество точек. Как точки можно упорядочить ?

Задание «порядка» с помощью метрики. Вариант 1

6

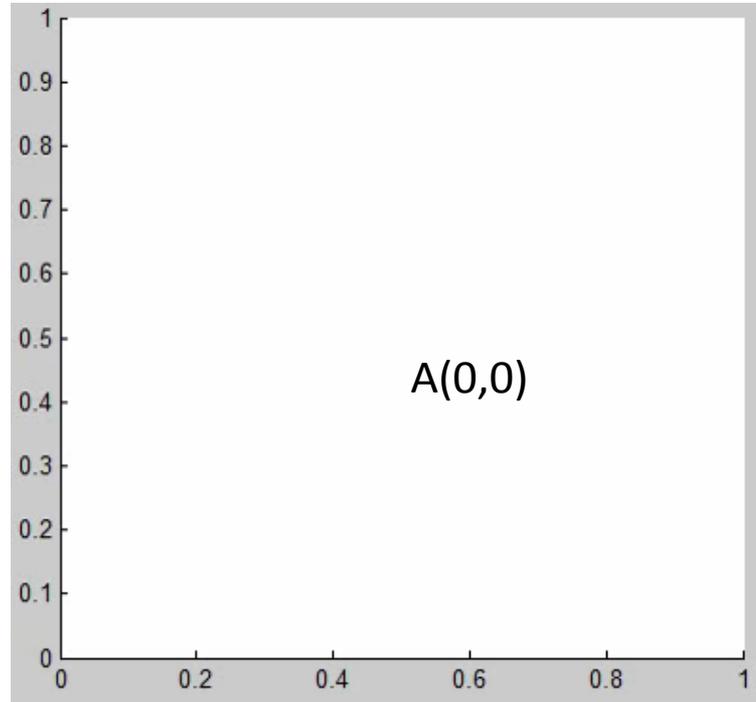


Зададим т.н. метрику Евклида или формулу для вычисления расстояние между точками вычисляется как $d=(x^2+y^2)^{1/2}$

Определим множество точек, которые удалены от центра координат A(0,0) на величину $0.49 < d < 0.5$

Задание «порядка» с помощью метрики. Вариант 2 (метрика Манхеттена)

7

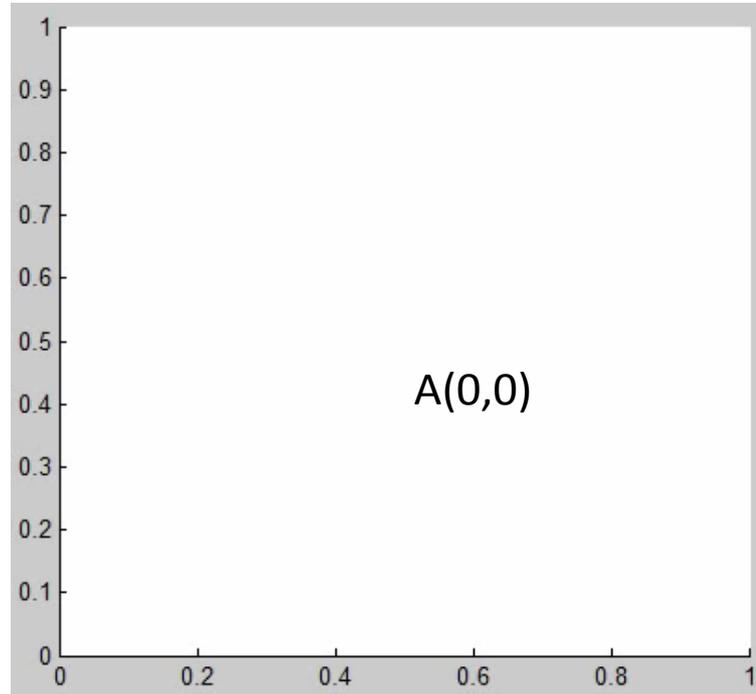


В этом случае расстояния между точками в которой
вычисляются по формуле:

$$d = |x| + |y|$$

то есть расстояние это просто сумма декартовых координат
без учета их знака

Задание «порядка» с помощью метрики. Вариант 3 (метрика Чебышева)



В этом случае расстояния между точками в которой
вычисляются по формуле:

$$d = \max(|x|; |y|)$$

то есть расстояние это наибольшая их декартовых координат
без учета их знака

Что из этого следует

Мы можем **рассчитать**
даже то, что невозможно себе представить
Л. Ландау

- На практике может иметь место ситуация, когда объект находится в нескольких состояниях и разделить эти состояния невозможно!
- Ситуация, когда имеет место наложение, например, «во времени», двух или большего числа состояний одного и того же объекта друг на друга, называется **суперпозиция**.
- Суперпозиция как феномен носит информационный характер и может реализовываться без какого-либо взаимного влияния одного состояния на другое.

Итого. Если объект может находиться в состоянии суперпозиции, то информация о свойствах объекта не теряется, но.... для сохранения этой информации такой объект должен обладать ресурсом памяти.

Должна развиваться физика объектов Природы, которые имеют ресурсы памяти и находятся в суперпозиции состояний, поэтому не все их этих состояний одновременно доступны для непосредственного **наблюдения**.

Квантовая методология науки - от «объективной» к «информационной» реальности

- Измеряемые величины в физике принято оценить с помощью чисел. В квантовой механике «наблюдаемые» представляются операторами, а не числами.
- Но во всех существующих научных теориях действует принцип сохранения информации, т.е. «носителем» физических процессов является 4-х мерное **пространство-время** и в нем ничего не изменяется. Прошлое, настоящее и будущее объектов «находится» на объекта на одной «мировой линии».
- Расстояние в **пространстве-времени**, называемое интервалом. оказывается, квадрат интервала равен разности: $s^2 = y^2 - x^2$. Это выражение очень похоже на выражение для обычной длины отрезка в Евклидовой геометрии (в нашем обычном пространстве), но вместо знака «+» в нём фигурирует «-».

Итак

При измерении величин в привычных единицах (метрах и секундах), интервал выражается формулой:

$$s^2 = t^2 - (x/c)^2 - (y/c)^2 - (z/c)^2$$

За единицу измерения расстояния принимается не метр, а *«расстояние, которое свет проходит за секунду»*, поэтому можно «избавиться» от скорости света.

- Можно использовать и другие выражения для интервала, которые, впрочем, не меняют его смысл. Например:

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (c \cdot t)^2$$

Фундаментальный вопрос компьютерных наук:

Можно ли за конечное время выполнить бесконечное число математических операций ?

- The Cellular Automaton Interpretation of Quantum Mechanics
- A View on the Quantum Nature of our Universe, Compulsory or Impossible?

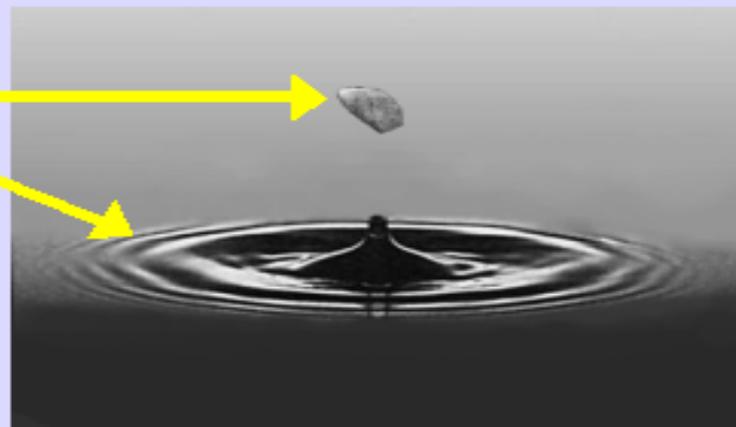
Gerard 't Hooft

Institute for Theoretical Physics
Utrecht University

Example 1

*A stone and a water wave are of **different matter**.*

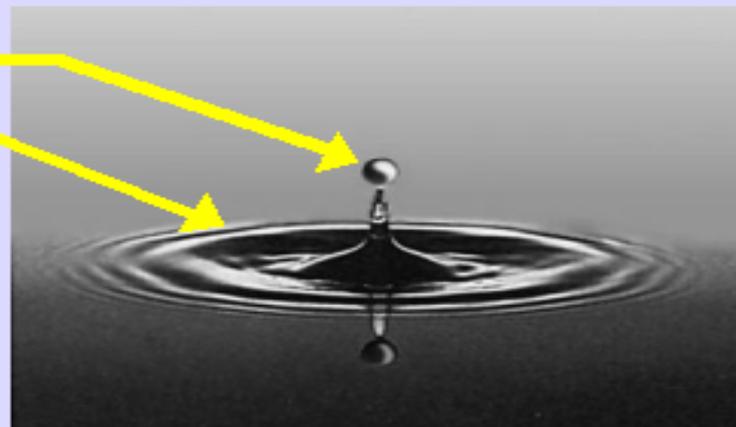
In this case, the wave-particle duality remains an enigma because a stone cannot become water and conversely.



Example 2

*A drop of water (corpuscle) and a water wave are of **identical matter**. Water has either a corpuscle behavior or a wave behavior.*

In this particular situation, wave-particle duality is explained with logic and consistency.



Дуальность математики и материи проявляется там, где частица, волна и среда имеет одно и тоже строение

Примеры «дуальности» в макро реальности

Дуальность «требует» **памяти** о том, в каком состоянии находится объект

Particle	wood	stone	water	water	glass	plastic	carbon
Wave	water	water	water	water	water	water	water
Medium	air	water	air	water	water	water	air
Duality ?	No	No	No	YES	No	No	No

Impossibilities (under No cells)

Impossibilities (under No cells)

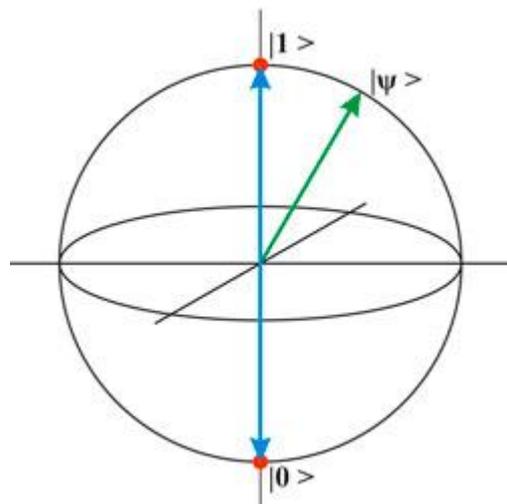
Duality is fully explained in this particular case (under YES cell)

Память макроскопической реальности реализуется через инерционность и законы сохранения

Сколько состояний у квантового объекта ?

15

Если квантовый объект имеет хотя бы два физически различных состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$, то мощность множества возможных векторов состояния **бесконечна**.



Количеством состояний квантовой системы - количество линейно независимых состояний или размерность пространства состояний. Это количество описывает число возможных исходов измерения состояния квантового объекта: $|\phi_{AB\dots C}\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle \otimes \dots \otimes |\phi_C\rangle = |\phi_A\rangle |\phi_B\rangle \dots |\phi_C\rangle$

ИТАК:

Квантовая теория имеет дело с объектами реальности, описание которых **не могут быть сведены к следствиям, вытекающим из ПРИНЦИПА «достаточного основания»**, где **причины и следствия** детерминированы связаны и обратимы .

Благодаря «сепарабельности состояний», физическая макроскопическая реальность замкнута относительно энергетических инвариантов, а для ее описания подходят «цифровые меры», которые выражаются через рациональные или вещественные числа.

Такая реальность порождает явления, которые можно наблюдать, прилагая к объекту с помощью приборов (инструментов) энергию в различных формах и получая **информацию** о том, какими характеристиками явление обладает.

Контр пример. – «Кинореальность»

- «кинореальность» непосредственно не порождает физических явлений, так как «энергетически» не замкнута, но ... оказывает информационное воздействие на объекты, которые способны эту информацию воспринимать.
- «кинореальность» - это объекты, которые с точки зрения классической физики не образуют «состоявшуюся» реальность, поэтому являются аномальными.
- К «аномальным» относятся объекты наделенные памятью и сознанием, т.е. живые организмы, способные к целенаправленному «движению» под воздействием не только энергии, но и информации.

Информация : классическая или квантовая

Классические (неквантовые) представления о вероятности исходят из того, что случайность является «ненастоящей» (субъективной).



Считается, что объект обладает конкретным свойством или значением параметра и до измерения, Само измерение просто проявляет то, что было ранее скрыто (кубик имел определенное «состояние» и до того как его вынули из урны).

Спутанность состояний объектов проявляется не в гильбертовом , а в вероятностном или информационном пространстве.

Квантовый формализм «комплексных» амплитуд

Когда мы образуем квадрат модуля суммы $w+z$ двух комплексных чисел w и z , мы обычно не получаем только лишь сумму квадратов модулей этих чисел; существует дополнительный «поправочный член»:

$$|w + z|^2 = |w|^2 + |z|^2 + 2|w||z|\cos(q),$$

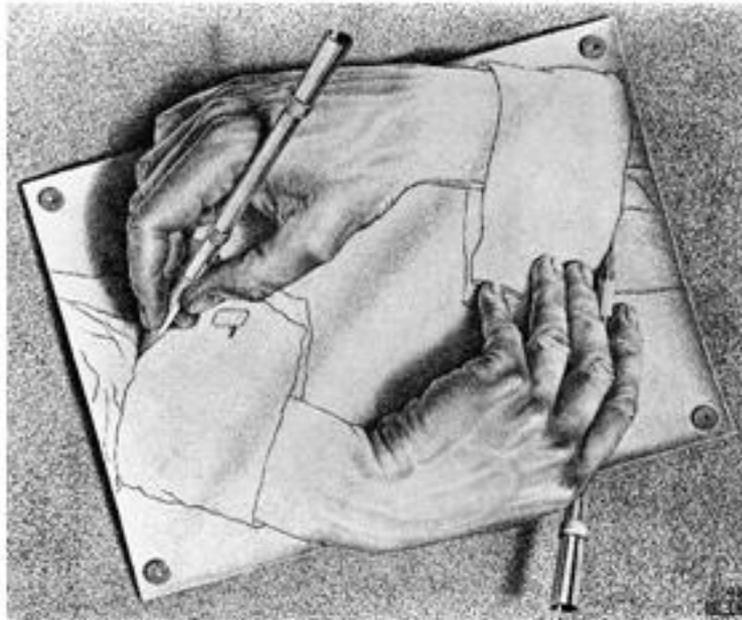
где q – угол, образуемый направлениями на точки z и w из начала координат на плоскости Аргана...

Поправочный член $2|w||z|\cos(q)$ описывает квантовую интерференцию между квантовомеханическими альтернативами, но интерференционное слагаемое не проявляется, если субъект обладает **информацией** («знанием») о траектории движения частицы.

Итак

- В физической реальности пространства-времени суперпозиция происходит на уровне микроскопическом уровне и только среди объектов, обладающих квантовыми, т.е. еще «**непроявленными**» свойствами.
- Если существует взаимодействие между макроскопическими объектами, которые **обладают памятью**, то между ними могут возникать информационные «корреляции» или **суперпозиции потенциально возможных состояний**.
- Такая **суперпозиция** не является физическим явлением, а есть информационно-вычислительный **феномен**, описывающий свойства объективной реальности .

Картина Эшера рисующие руки



Пример взаимного сосоздания и циркулярной причинности.
Метафора странной петли Хофштаттера



Выводы

- В природе может иметь место ситуация, когда объект находится в нескольких состояниях и разделить или вычислить эти состояния невозможно!
- Имеет место наложение двух или большего числа состояний друг на друга - суперпозиция.
- Суперпозиция носит информационный характер и может реализовываться без какого-либо взаимного влияния одного состояния на другое.

Пространство состояний объекта характеризуется положением взаимной «дополнительности»!!! Метрика этого пространства неархимедова!

В состоянии суперпозиции информация о свойствах объекта не теряется, поэтому не происходит диссипация энергии и и увеличение энтропии.