КАФЕДРА
ТЕЛЕМАТИКА

Санкт-Петербургский Государственный Политехнический Университет

Институт прикладной математики и механики

История и методология математики и компьютерных наук

Лекция 3

«Посткремниевые» вычисления: информационная «запутанность»

17 сентября 2020 г.

Что обсуждалось на прошлой лекции

Нужны технологии, которые должны позволить создавать технические системы, которые только могут не только «вычислять» как люди, но

- «думают» как люди
- действуют как люди

Т.е

- «думают»: рационально или частично-рационально ?
- «действуют»: алгоритмически или интуитивно

Для этого нужна «новая математика»

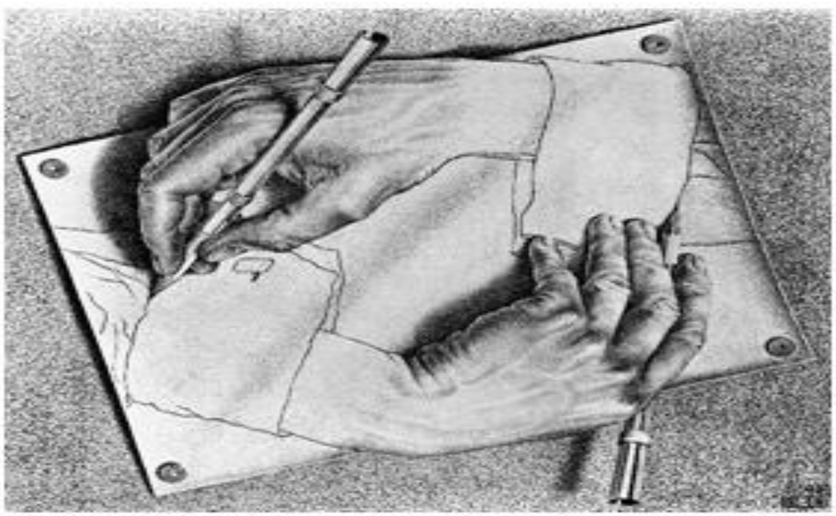
- классическая математика (операции сложения и умножения) имеет дело с объектами, которые обладаю свойствами «однородности» и «делимости».
- Основная идея «новой математики» в том, чтобы проводить операций со сложными объектами, например, с квантовыми объектами - кубитами , основными операциями с такими объектами является операции «суперпозиция» и «телепортации» – передачи **состояния квантовой частицы** из одного места пространства в другое (from one location to another)

см. S. Lomonaco, “A Rosetta Stone for Quantum Computation”

В чем особенность феномена «сложности»

1. Сложные объекты обладают «странными» особенностями. У них есть **непроявленные, но объективно возможные состояния**, которые образуют **суперпозиции**. Поэтому клонировать, т.е. точно копировать текущие состояния квантовых объектов нельзя, однако текущие состояния можно «телепортировать» , т.е. перемещать «из одного места пространства в другое.

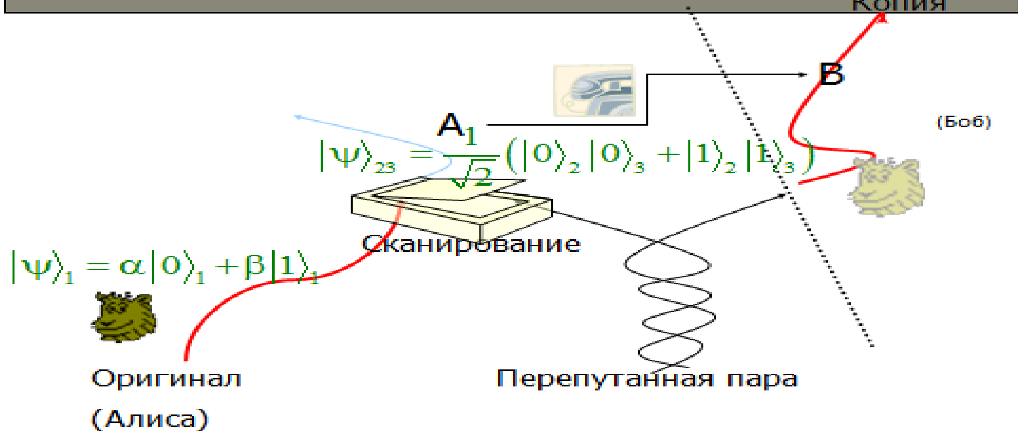
Картина Эшера рисующие руки



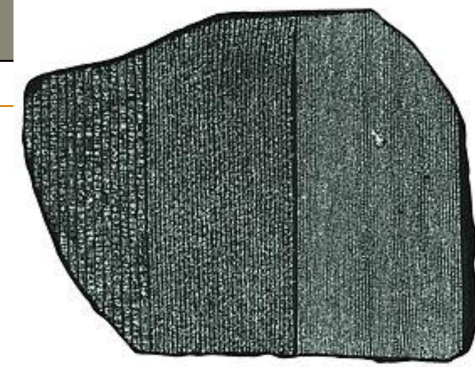
Пример взаимного сосоздания и циркулярной причинности
Метафора странной петли Хофштаттера

Процесс телепортации «кода» состояния – it from bit

1. Состояние квантового объекта можно представить как цифровой код – совокупность состояний, например, нескольких 2-х уровневых квантовых объектов - кубитов. Чтобы **«телепортировать» состояние квантового объекта** из одного места в другое надо: 1) у «телепортируемого» кубита д. б. «кубит-партнер»; 2) эти два кубита надо перевести в «запутанное состояние», 3) произвести измерение состояния «оригинала» ,т.е «разрушить» его квантовое состояние; 3) передать по классическому каналу результат измерения «партнеру»; 4) применить к кубиту «приемника» унитарные преобразования.



Современная математика напоминает Rosetta Stone - запись свойств природы на различных «языках»



Это «языки»:

- Классическая математика или метафора физики **существующего** (И. Ньютон) – детерминированная и обратимая зависимость между причиной и следствием, сила причина движения, которое подчиняется законам физики (Принцип достаточного основания)
- Метафора физики **возникающего** (И. Пригожин) – появления новых макроструктур как разновидности порядка. Причина «движения» возрастание энтропии внешней среды (диссипативное становление)
- Метафора физики **управляемого**:

  - кибернетика (Н. Винер) – цель как причина «движения», а передача информации как основа управления

  - киберфизика – информация как причина и результат «движения», управление как вычисление цели (It from Bit)

«Язык» современной математики построен на основе важнейших символов-понятий, а именно:

- **Ноль** => 0=А-А, тогда, если А-В=0, то А=В
- **Единица** => $1=а^2+б^2+в^2+....+э^2$, $p(\lambda_n) = |c_n|^2$
- **Мнимая единица** $i\hbar\dot{\psi}_\nu(q) = \hat{H}\psi_\nu(q)$
- **Бесконечность**

- вероятность, что при измерении физической величины А мы получим собственное значение λ_n

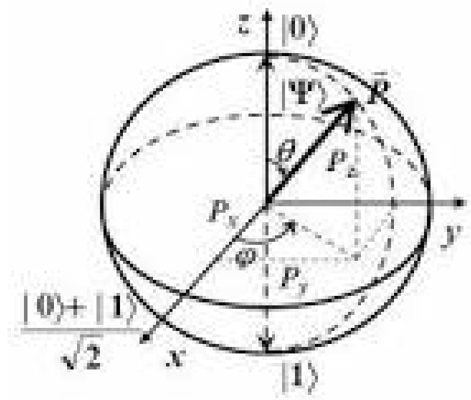
Что будем обсуждать на лекции

1. Чем метафора квантового описания «природы» отличается от «классического»
2. Почему в природе не наблюдается суперпозиция классических состояний
3. Почему классические статистические корреляции «противопоставляются» информационной «запутанности » квантовых объектов

1. Квантовые vs классические объекты – форма и семантика описания

Квантовый объект (система) описывается вектором состояния $|\psi\rangle$ (нормировка: $\langle\psi|\psi\rangle = 1$) . Вектор $|\psi\rangle$ определен с точностью до постоянного **фазового** множителя e^{ia} (**состояния $|\psi\rangle$ и $e^{ia}|\psi\rangle$ физически тождественны**);

$$\dot{q} = Q(q,p,t); \quad \dot{p} = P(q,p,t),$$



Переход от одного состояния к другому описывается линейным оператором : $|\psi\rangle \rightarrow A|\psi\rangle$, причем det A=1

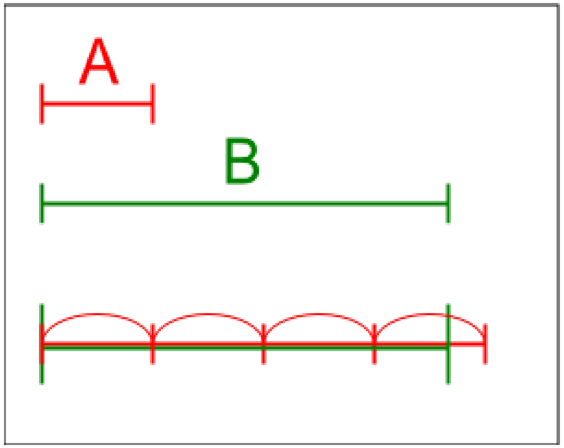
Вектор состояния 2-х уровневой квантовой системы МОЖНО описать с помощью суперпозиции 2-х ортогональных (в классической физике **несовместных**) базисных векторов $|0\rangle$ и $|1\rangle$, где

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \qquad \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

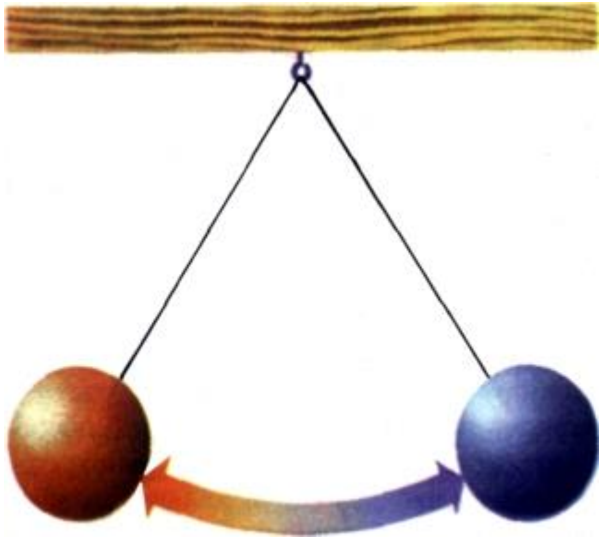
Аксиома Архимеда «классической математика»

Аксиомой Архимеда называется такое утверждение: если даны отрезки A (масштаб) и B (объект измерения) , то можно так отложить отрезок A несколько раз, что сумма будет равна или «немного» превосходить отрезок B ,



Утверждение : изучаемое математикой ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ архимедово то. Есть **одномасштабно**, значит гладко, «делимо и однородно».

«Простые» физические объекты – одномасштабны

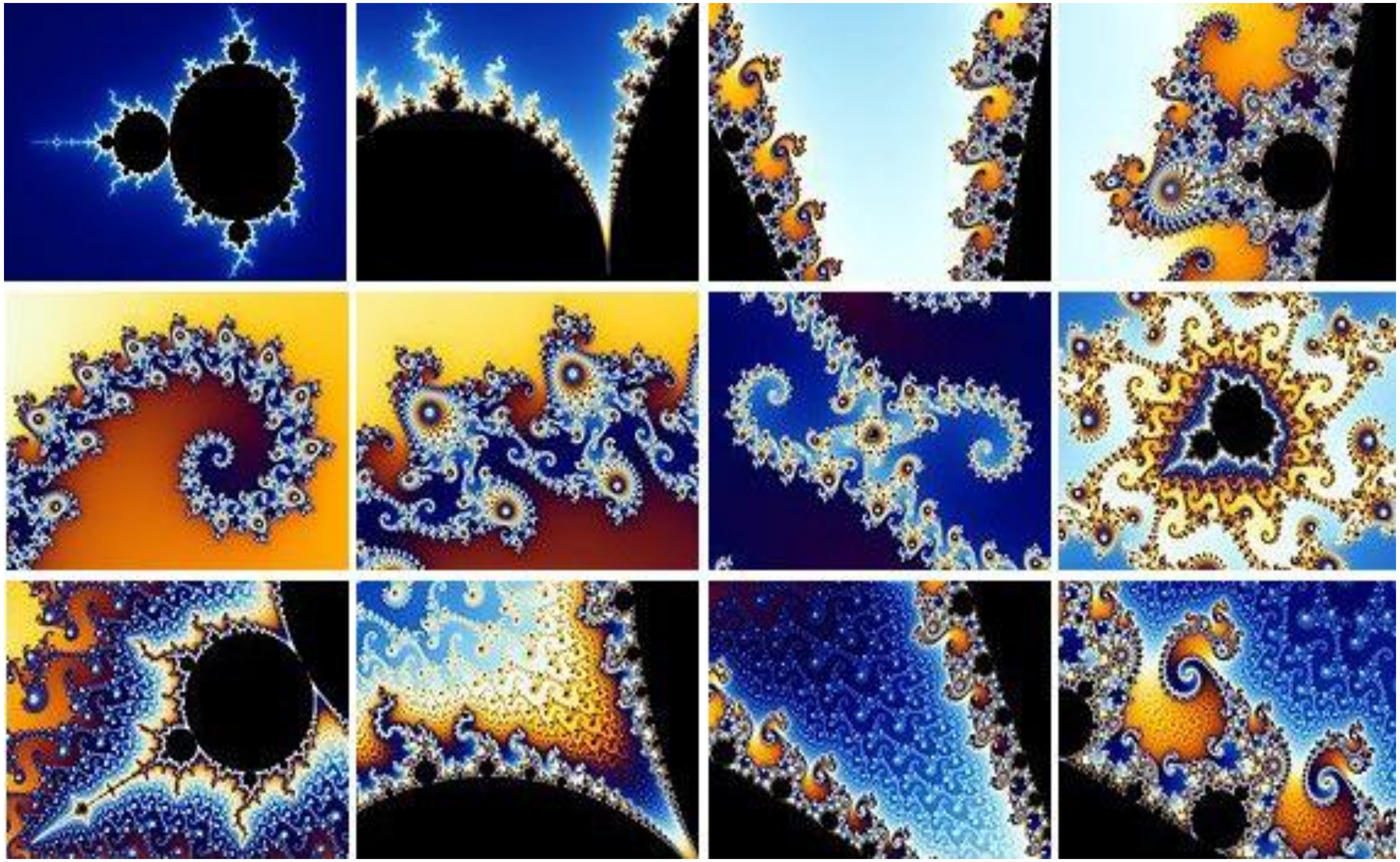


«Сложные» объекты - мультимасштабны

Сложные структуры не однородны

они не имеют одного масштаба, поэтому связаны

это значит, что «деление» на «подобъекты» невозможно



Метафора движения – математика фазовых траекторий

Уравнение $q = q(t; q_0, p_0); \quad p = (t; q_0, p_0),$

имеет ОДНО решение которое зависит от начальных условий: $q_0 = q(0)$, $p_0 = p(0)$ и это решение называется - *фазовая траектория*.

- Состоянию равновесия объекта отвечает вырожденная траектория – точка в фазовом пространстве, периодическому движению – замкнутая траектория и т.д.
- Фазовые кривые (траектории) не пересекаются, за исключением некоторые кривых, составляющих так называемое множество нулевой меры.

Метафора сохранения - уравнение непрерывности

Уравнение непрерывности выражает *закон сохранения числа частиц в фазовом пространстве – «виртуальном объеме» для фазовых траекторий*. Если рассматривать временную эволюцию не точки в фазовом пространстве, **а элемента фазового объема**, то по характеру деформации границы фазового объема можно судить об устойчивости или неустойчивости движения

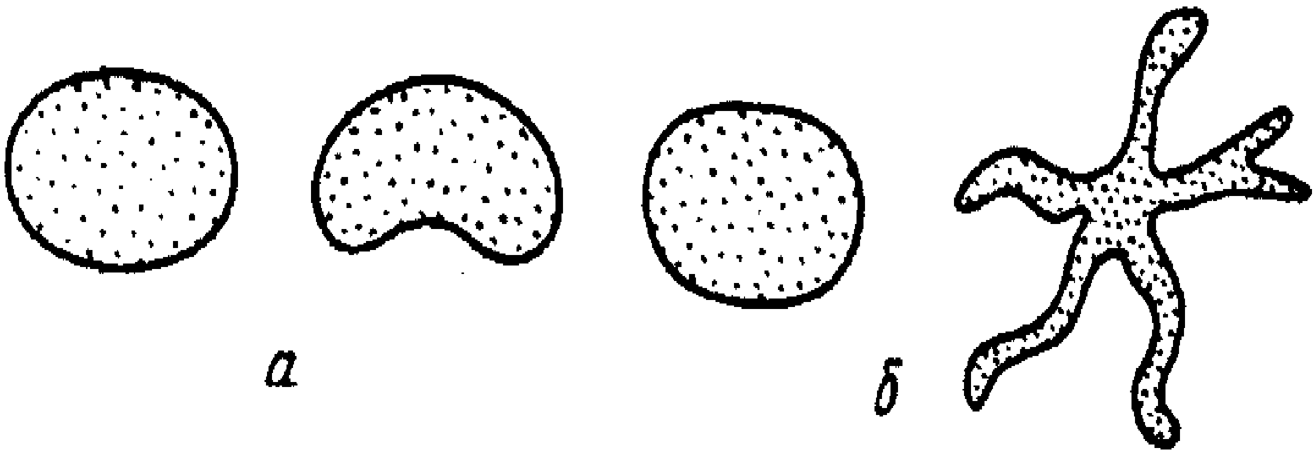


Схема изменения элемента фазового объема при устойчивом (а) и неустойчивом (б) движении.

С позиций классической физики «суперпозиции» состояний не существует., ……действует закон исключенного третьего

В «реальном» мире суперпозиции нет - происходит коллапс «вектора состояний» или редукция «волновой функции» к одной из возможностей

Пример:

«Кот Шредингера»:

Ключевой вопрос: можно ли «остановить» редукцию волновой функции и, если да, то на какое время?

Вероятность - атрибут квантовой реальности, объединяющий «несовместные» состояния.

Постулат 1.Поведение квантовой системы полностью описывается **амплитудами вероятностей**. Амплитуды вероятностей образуют вектор состояния в гильбертовом пространстве

Является вектор состояния истинным состоянием объекта?

(**Истина – по гречески алетея (ἀλήθεια) - состояние «нескрытости»**

Постулат 2. Амплитуды вероятностей как координаты вектора состояния могут быть заданы в различных эквивалентных представлениях (состояния $|\psi\rangle$ и $|\psi'\rangle = e^{ia}|\psi\rangle$ физически тождественны.

Символически это можно записать матричным равенством:

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle \qquad (1)$$

Любая унитарная матрица может быть представлена в виде матричной экспоненты

$$(U = \exp(i\,H), \qquad (2)$$

где H- эрмитова матрица.

Объем ИНФОРМАЦИИ о состояниях квантового объекта.

Постулат 3. Измерения, проводимые в различных унитарно связанных друг с другом базисных представлениях, порождают совокупность **взаимно-дополнительных** статистических распределений (!)

В выбранном представлении квадрат модуля амплитуды вероятностей задает вероятность **обнаружения квантовой системы** в соответствующем **базисном состоянии**.

Постулат 4. *Пространство состояний составной системы образовано тензорным произведением пространств состояний отдельных систем.*

Так, N кубитов, рассматриваемые как единая квантовая система -регистр, порождают 2^N базисных состояний и, соответственно, гильбертово пространство размерности 2^N. Объем информации о состоянии квантового объекта зависит размерности пространства состояний.

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \\ a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 \end{bmatrix}$$

Примеры (1)

В классической физике, возможные состояния системы **n** частиц, индивидуальные состояния каждой из которых описываются **вектором в двумерном векторном пространстве**, образуют векторное пространство, содержащее **2n измерений**. В то же время, для квантовых систем соответствующее результирующее пространство имеет гораздо большую размерность, а **именно 2^n**

С математической точки зрения **отличие квантовых систем от классически**х заключается в том, что в классической физике пространство состояний образуется посредством операции декартового произведения, в то время как в квантовой ⍰ посредством тензорного произведения базисных векторов

Регистр из 3-х кубитов – это квантовая система, базис которой состоит из векторов: **2^3=8 векторов**.

а именно:

{ |111> , |110> , |101> , |100> , |011> , |010> , |001> , |000> }

Примеры (2)

Итак, пространство состояний **составной системы** представляет собой тензорное произведение пространств состояний входящих в нее систем.

Если одна система находится в состоянии $|\psi_1\rangle$, а другая система – в состоянии $|\psi_2\rangle$, то составная система находится в состоянии $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$.

Вместо $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ пишут $|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle$ или $|\psi_1\psi_2\rangle$.

Например, запись |000> означает тензорное произведение 3-х векторов (где 0>=[1,0]^T), а именно |0>⊗|0>⊗|0> =[1,0,0,0,0,0,0,0]^T, а |001> =[0,1,0,0,0,0,0,0]^T

Расширение пространства состояний составной системы

При композиции квантовых систем их состояние описывается прямым (тензорным) произведением векторов состояния подсистем.
В матричном представлении это записывается так

$$\begin{pmatrix} a_A \\ b_A \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_B \\ b_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_A \begin{pmatrix} a_B \\ b_B \end{pmatrix} \\ b_A \begin{pmatrix} a_B \\ b_B \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_A a_B \\ a_A b_B \\ b_A a_B \\ b_A b_B \end{pmatrix} = a_A a_B |00\rangle + a_A b_B |01\rangle + b_A a_B |10\rangle + b_A b_B |11\rangle$$

Операторы, действующие на составную систему есть прямое произведение матриц (операторов), действующих на подсистемы

$$\begin{pmatrix} a_A & b_A \\ c_A & d_A \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_B & b_B \\ c_B & d_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_A \begin{pmatrix} a_B & b_B \\ c_B & d_B \end{pmatrix} & b_A \begin{pmatrix} a_B & b_B \\ c_B & d_B \end{pmatrix} \\ c_A \begin{pmatrix} a_B & b_B \\ c_B & d_B \end{pmatrix} & d_A \begin{pmatrix} a_B & b_B \\ c_B & d_B \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Квантовые измерения «рождают» вероятность

Квантовые измерения описываются набором операторов $\{M_m\}$, действующих на пространстве состояний системы. Если состояние системы до измерения – $|\psi\rangle$, то **вероятность** получения результата m составляет

$$p(m) = \langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle$$

а состояние системы после измерения –

$$\frac{M_m|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle}}$$

Результаты квантовых измерений «полны» в смысле вероятности возможных исходов

Операторы измерения удовлетворяют уравнению полноты:

$$\sum_m M_m^{\dagger} M_m = I$$

Условие «полноты» измерений - сумма **вероятностей** всех «исходов» равна единице:

$$\sum_m p(m) = \sum_m \langle \psi | M_m^{\dagger} M | \psi \rangle = 1$$

Заключение

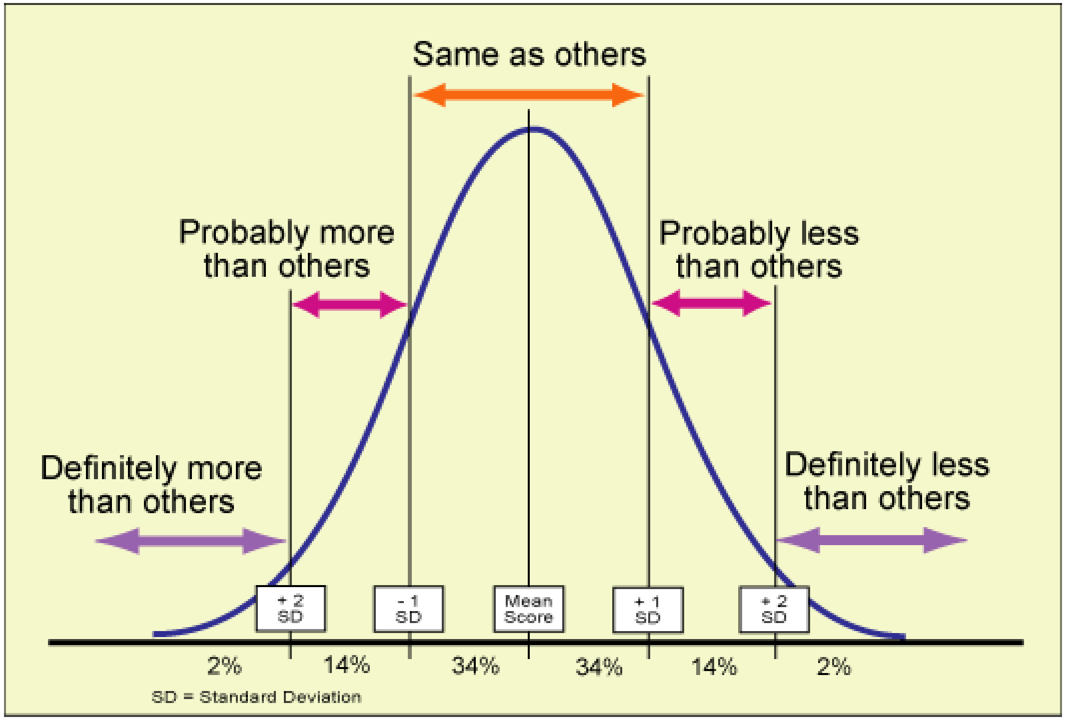
Количественное описание явлений природы опирается на метафору античной математики – «все есть число» (Пифагор).

- Физические модели «существующего», базируется на детерминированной, обратимой и измеримой зависимости между причиной и следствием (Принцип достаточного основания)

В науке рассматривается также:

- описание, восходящее к термодинамике («тепловая смерть» Вселенной) и физике возникающего (И. Пригожин) или «движения» к порядку отдельной макроструктуры, за счет возрастания энтропии внешней среды (диссипативное становление)
- физика управляемого обратной связью - кибернетика (Н. Винер) – в которой цель есть причина «движения», а передача информации - снова управления (It from Bit)

Классическое нормальное распределение



Квантовая вероятность

Итого

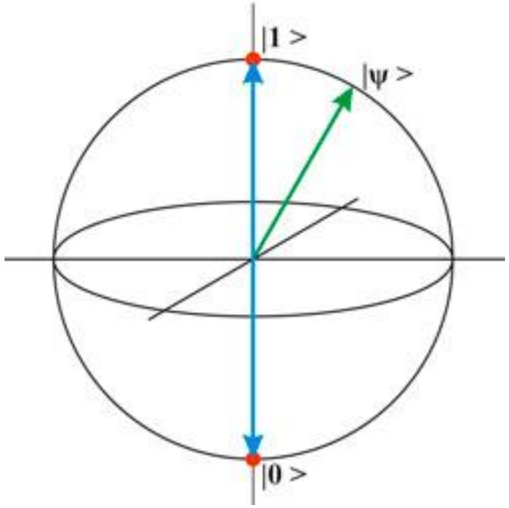
Вектор состояния квантового объекта определяется 2^N комплексными амплитудами вероятности.

Если состояния были бы классическими то у объекта из N частиц описание содержало бы 2N комплексных амплитуд вероятности,

Разность 2^N-2N обусловлена специфическим квантовым – запутанностью. Это основа «квантового подхода» к описанию модели мира

Количество состояний квантового объекта

Если система имеет хотя бы два физически различных состояния, то мощность множества возможных векторов состояния бесконечна.



Будем под количеством состояний квантовой системы подразумевать количество линейно независимых состояний, то есть размерность пространства состояний. Это количество описывает число возможных исходов измерения состояния квантового объекта. В случае конечномерного пространства число уровней энергии (и соответствующих им состояний) будет равно размерности пространства состояний.

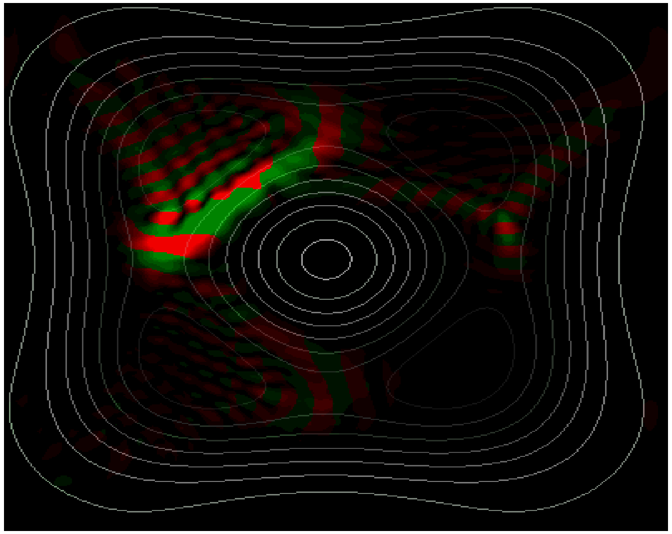
Запутанные состояния квантового объекта (Entangled states)

Составные состояния, которые представляются в виде произведения

$|\phi_{AB...C}\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle \otimes \ldots \otimes |\phi_C\rangle = |\phi_A\rangle\, |\phi_B\rangle \ldots |\phi_C\rangle$

называются факторизуемыми (мультипликативными, сепарабельными)

В них можно выделить вклад каждой частицы в отдельности



Запутанные состояния – это такие, для которых факторизация невозможна:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0_A\rangle|0_B\rangle + |1_A\rangle|1_B\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right);$$

Запутанные состояния квантового объекта (2)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0_A\right\rangle\left|1_B\right\rangle-\left|1_A\right\rangle\left|0_B\right\rangle\right) \quad = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|01\right\rangle-\left|10\right\rangle\right)$$

В этом состоянии нельзя вычленить вклад одной или другой частицы: их состояния «перепутаны» , т.е. связаны или несепарабельны

Противоположный пример: композитное состояние $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0_A\right\rangle\left|0_B\right\rangle+\left|0_A\right\rangle\left|1_B\right\rangle\right)$

может быть представлено в виде $\left|0_A\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0_B\right\rangle+\left|1_B\right\rangle\right)$

Вывод: Вектор состояния композитной системы $|\phi_{AB\ldots C}\rangle$ выражает всю доступную информацию о системе, но в случае запутанного состояния не дает полного знания о составляющих подсистемах. В классической физике знание целого означает знание частей, в квантовой для подсистем нам известны только вероятности того или иного их состояния

.

2. Наблюдается ли в Природе суперпозиция макро-состояний

ИТАК:
квантовая теория имеет дело с реальными физическими процессами, которые не могут быть описаны классической физикой, В КОТОРОЙ ДЕЙСТВУЕТ ПРИНЦИП «достаточного основания» - причины и следствия детерминированы связаны и обратимы. .

Благодаря обратимости, физическая реальность замкнута относительно энергетических инвариантов. Такая реальность порождает явления, которые можно наблюдать, прилагая к объекту с помощью приборов энергию в различных формах и получая информацию о том, какими характеристиками явление обладает.

Контр пример. Кинореальность не порождает физических явлений, так как «энергетически» не замкнута, но оказывает информационное воздействие на объекты, способные эту информацию воспринимать.

ТАКИЕ объекты с точки зрения физической реальности являются аномальными. К ним относятся объекты наделенные сознанием и живые организмы, способные к целенаправленному «движению».

Информация : классическая или квантовая

- Классические (неквантовые) представления о вероятности исходят из того, что случайность является «ненастоящей» (субъективной).

На самом деле объект, якобы, обладает данным значением параметра и до измерения, только оно скрыто от нас, а измерение просто проявляет то, что было ранее скрыто (кубик имел определенное «состояние» и до того как его вынули из урны). Хотя кубики существуют «сепарабельно» , т.е. независимо друг от друга, но некоторые их свойства «спутаны», например, суммарное число граней или средний «выийгрыш».
Спутанность проявляется не в гильбертовом , а в вероятностном или информационном пространстве.

Формализм «комплексных» амплитуд

Когда мы образуем квадрат модуля суммы w+z двух комплексных чисел w и z, мы обычно не получаем только лишь сумму квадратов модулей этих чисел; существует дополнительный «поправочный член»:

|w + z|2 = |w|2 + |z|2 + 2|w||z|cosq,
где q – угол, образуемый направлениями на точки z и w из начала координат на плоскости Аргана...

Именно поправочный член 2|w||z|cosq описывает квантовую интерференцию между квантовомеханическими альтернативами
Поправочное интерференционное слагаемое не проявляется если субъект обладает информацией («знанием») о траектории движения частицы.

Суперпозиция как феномен квантовой реальности

В природе имеет место ситуация, когда объект находится в нескольких состояниях одновременно, т.е. имеет место наложение двух или большего числа состояний друг на друга. И не просто наложение, а наложение без какого-либо взаимного влияния.
Например, экспериментально доказано, что одна частица может одновременно проходить через две щели в непрозрачном экране. Частица, проходящая через первую щель - это одно состояние. Та же частица, проходящая через вторую щель - другое состояние. И эксперимент показывает, что наблюдается сумма этих состояний! Т.е. частица одновременно проходит через две щели! В таком случае говорят о суперпозиции состояний» .

что надо для наблюдения суперпозиции состояний? - «для наблюдения суперпозиции мы не должны фиксировать состояние объекта»

Суперпозиция как Информационные корреляции

Суперпозицию мы воспринимаем через интерференцию состояний.

Если есть взаимодействие между макроскопическими объектами, которые обладают памятью, то между ними обязательно будут присутствовать информационные корреляции».

Суперпозиция – это не реальное явление, а математический формализм, правильно описывающий реальность.

ИНФОРМАЦИЯ В «запутанных» СИСТЕМАХ

Итак: Квантовое состояние системы называется запутанным, если оно не сводится к состояниям отдельных подсистем.
Процесс получения информация о запутанных и незапутанных состояниях отличается друг от друга. Для запутанных состояний используется матрица плотности

$$\rho = \sum_j p_j \left|\psi_j\right\rangle\left\langle\psi_j\right|$$

$$\left|\psi_j\right\rangle\left\langle\psi_j\right| = \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_j^* & b_j^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left|a_j\right|^2 & a_j b_j^* \\ b_j a_j^* & \left|b_j\right|^2 \end{pmatrix}$$

Состояние, которое описывается не вектором $|\psi\rangle$, а оператором ρ, называется смешанным;
Чистое состояние получается, когда все $p_j = 0$, кроме одной. Для него $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$

Матрица плотности подсистемы: $\rho_A = \mathrm{Sp}_B\left(\rho_{AB}\right) = \sum_j \left\langle\psi_{Bj}\right|\rho_{AB}\left|\psi_{Bj}\right\rangle$

$$\left|\psi_{AB}\right\rangle = a\left|0_A\right\rangle\left|0_B\right\rangle + b\left|1_A\right\rangle\left|1_B\right\rangle \quad \rho_{AB} = \left|\psi_{AB}\right\rangle\left\langle\psi_{AB}\right| = \left(a\left|0_A\right\rangle\left|0_B\right\rangle + b\left|1_A\right\rangle\left|1_B\right\rangle\right)\left(a^*\left\langle 0_B\right|\left\langle 0_A\right| + b^*\left\langle 1\right.\right.$$

$$\rho_A = \mathrm{Sp}_B\left(\rho_{AB}\right) = \left\langle 0_B\right|\rho_{AB}\left|0_B\right\rangle + \left\langle 1_B\right|\rho_{AB}\left|1_B\right\rangle =$$

Измерение запутанных состояний

Запутанность может сохраняться, даже если подсистемы пространственно разделены

Можно наблюдать и измерять состояние отдельной подсистемы.

Вся система $\left|\psi_{AB}\right\rangle = a\left|0_A\right\rangle\left|1_B\right\rangle + b\left|1_A\right\rangle\left|0_B\right\rangle$

Наблюдается подсистема *B*

При измерении она может быть найдена в состоянии $|0_B\rangle$ или $|1_B\rangle$

Пусть обнаружено состояние $|1_B\rangle$: начальное состояние $|\psi_{AB}\rangle$ "проектируется" на $|1_B\rangle$

$$\left|\psi_{AB}\right\rangle \to \left\langle 1_B \middle| \psi_{AB}\right\rangle\left|1_B\right\rangle = \left(a\left\langle 1_B \middle| 0_A\right\rangle\left|1_B\right\rangle + b\left\langle 1_B \middle| 1_A\right\rangle\left|0_B\right\rangle\right)\left|1_B\right\rangle =$$

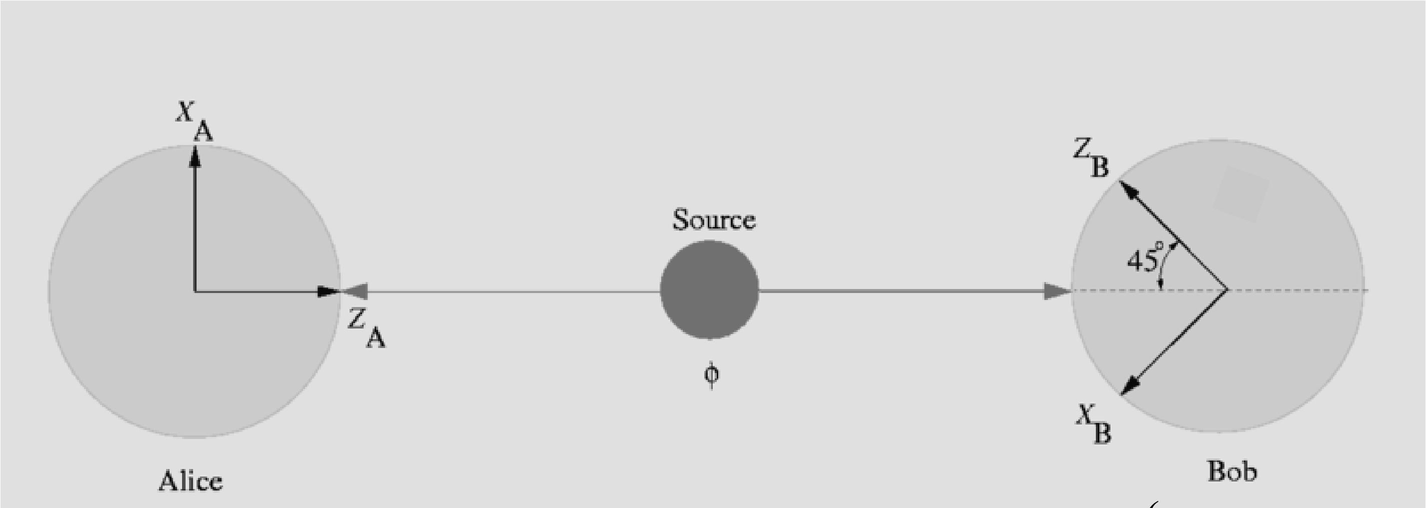
$$= \left(a\left\langle 1_B \middle| 1_B\right\rangle\left|0_A\right\rangle + b\underbrace{\left\langle 1_B \middle| 0_B\right\rangle}_{=0}\left|1_A\right\rangle\right)\left|1_B\right\rangle = a\left|0_A\right\rangle\left|1_B\right\rangle$$

Если в результате редукции, вызванной измерением, частица *B* оказывается в состоянии $|1_B\rangle$, то слагаемые $|\psi_{AB}\rangle$, где содержатся другие ортогональные состояния этой частицы, исчезают.

Частица *A* неизбежно оказывается в том состоянии, которое «сцеплено» с $|1_B\rangle$, найденным при измерении *B* (в данном случае $|0_A\rangle$)

Вероятность обнаружить частицу *B* в состоянии $|1_B\rangle$:
"квадрат длины" проекции $|\langle 1_B|\psi_{AB}\rangle|^2$

Парадокс Эйнштейна – Подольского – Розена (ЭПР)



Источник создает пару электронов в синглетном состоянии (спины антипараллельны)

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+z_A\rangle|-z_B\rangle - |-z_A\rangle|+z_B\rangle\right)$$

Наблюдатель А измеряет спин и находит состояние $|+z_A\rangle$

Соответствующая проекция начального состояния $\langle +z_A|\psi_{AB}\rangle|+z_A\rangle \sim |-z_B\rangle|+z_A\rangle$;
Наблюдатель В со 100% вероятностью найдет состояние $|-z_B\rangle$

Электрон у В мгновенно «узнает» о результате измерения у А:
«сверхсветовая» связь???

Подробности

Вов не знает о том, как ориентированы оси у Alice.
Возможно, он измеряет спин относительно другой оси, например, x: $\langle \pm x_B | -z_B \rangle | \pm x_B \rangle$
В базисе $|\pm z_B$

$$|+z_B\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |-z_B\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad |+x_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |-x_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Амплитуда вероятности обнаружить спин в состоянии $|\pm x_B\rangle$

$$\langle \pm x_B | -z_B \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad \pm 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$, то есть вероятность 1/2

При измерении спина относительно других осей (не z), неопределенность сохраняется
Электрон в точке В «получает» инструкции, как вести себя после того, как в точке А выполнено измерение. Причинность не нарушается, т.к. измерение состояния электрона в точке В нельзя использовать для передачи информации . Информация может быть извлечена из сопоставления результатов измерений В и А. В не может мгновенно узнать о результате эксперимента А. Для него априорная вероятность 50% любого исхода остается в силе.

Запрет клонирования квантового состояния

В классической физике копирование бита – тривиальная операция. Квантовый случай: есть некоторое системы A. Чтобы получить копию состояния $|\Psi_A\rangle$, возьмем систему B с таким же пространством состояний, находящуюся в некотором стандартном состоянии $|0_B\rangle$. Объединенная система $A + B$ в композитном состоянии $|\Psi_A\rangle|0_B\rangle$. Задача: получить в системе B состояние $|\Psi_B\rangle$, совпадающее с $|\Psi_A\rangle$, не разрушая исходного состояния $|\Psi_A\rangle$. Все, что можно сделать: унитарное преобразование $|\Psi_A\rangle|0_B\rangle \to |\Psi_A\rangle|\Psi_B\rangle$ или даже $|\Psi_A\rangle|0_B\rangle|W\rangle \to |\Psi_A\rangle|\Psi_B\rangle|W'\rangle$
где W, W' соответствуют некоторым состояниям «внешнего мира».

Копироваться должны любые состояния системы A: для произвольных $|\Phi_A\rangle$ и $|\Psi_A\rangle$

$$|\Psi_A\rangle|0_B\rangle|W\rangle \to |\Psi_A\rangle|\Psi_B\rangle|W'\rangle \qquad |\Phi_A\rangle|0_B\rangle|W\rangle \to |\Phi_A\rangle|\Phi_B\rangle|W''\rangle$$

Унитарность: скалярное произведение сохраняется

$$\langle W|\langle 0_B|\langle \Phi_A|\Psi_A\rangle|0_B\rangle|W\rangle = \langle \Phi|\Psi\rangle_A = \langle W''|\langle \Phi_B|\langle \Phi_A|\Psi_A\rangle|\Psi_B\rangle|W'\rangle = \langle \Phi|\Psi\rangle_A\langle \Phi|\Psi\rangle_B\langle W''|W'\rangle$$

Поскольку пространства состояний идентичны, $\langle \Phi|\Psi\rangle = \langle \Phi|\Psi\rangle^2 \, \langle W''|W'\rangle$

Т.к. $|\langle W''|W'\rangle| \le 1$, это может быть только при $|\langle \Phi|\Psi\rangle| = 0$ или 1. Копирование квантового состояния, вообще говоря, невозможно

Значение свойства no cloning

Устанавливает невозможность неразрушающих измерений квантового объекта.

Запрещает классическую коррекцию ошибок: невозможно создавать резервные копии промежуточных результатов.

- При передаче квантовой информации: не позволяет тайно создавать копии передаваемого шифрованного сообщения (защита от "подслушивания").
- "Спасает" принцип неопределенности: если допустить копирование неизвестного квантового состояния, то по одной копии можно измерить координату, а по другой – импульс.
- Предотвращает сверхсветовую коммуникацию посредством запутанных состояний:
- Теорема не запрещает создание копии с разрушением исходного состояния.

Состояния Белла

"естественные" базисные состояния двухкомпонентной квантовой системы такие

$$|0\rangle|0\rangle, \quad |0\rangle|1\rangle, \quad |1\rangle|0\rangle, \quad |1\rangle|1\rangle$$

Эти базисные состояния мультипликативны (т.е не "запутаны"). Однако можно ввести линейные комбинации этих базисных состояний

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle\right) \qquad |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle\right)$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle\right) \qquad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle\right)$$

Эти состояния тоже образуют ортонормированный базис двухкомпонентной системы,

$$|\phi\rangle = a|\Phi^+\rangle + b|\Phi^-\rangle + c|\Psi^+\rangle + d|\Psi^-\rangle$$

В частности, $|0\rangle|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Phi^+\rangle + |\Phi^-\rangle\right)$ $\qquad |1\rangle|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Phi^+\rangle - |\Phi^-\rangle\right)$

$$|0\rangle|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Psi^+\rangle + |\Psi^-\rangle\right) \qquad |1\rangle|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Psi^+\rangle - |\Psi^-\rangle\right)$$

Состояния $|\Phi^\pm\rangle$, $|\Psi^\pm\rangle$ - состояния Белла. Они "максимально запутаны".

ИНФОРМАЦИЯ В КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

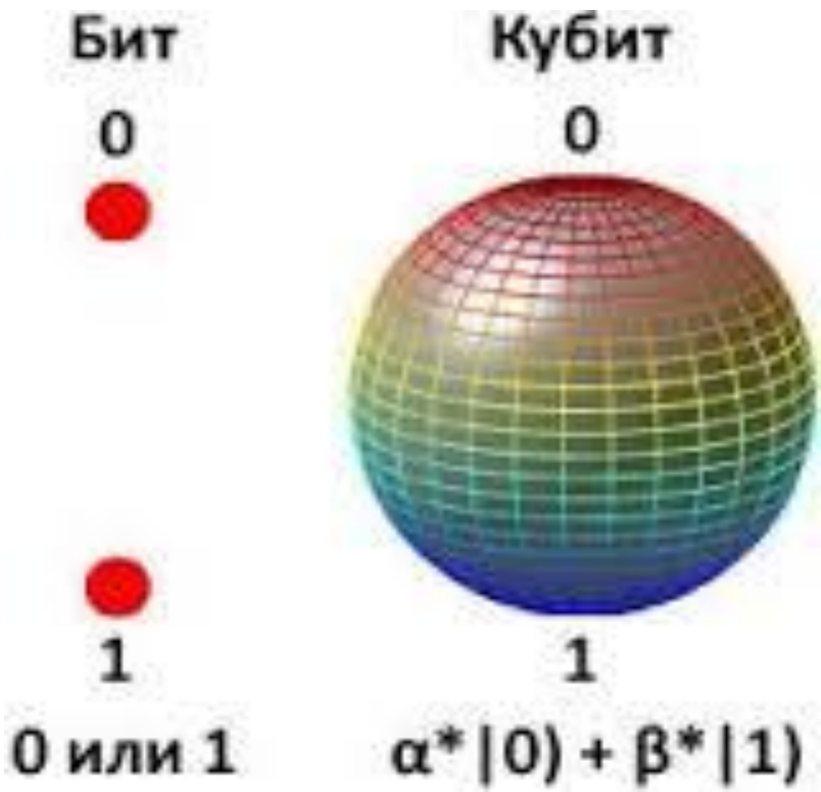
Физическая величина представляется самосопряженным (эрмитовым) оператором Q :
$\langle\phi|Q|\psi\rangle = (\langle\psi|Q|\phi\rangle)^*$

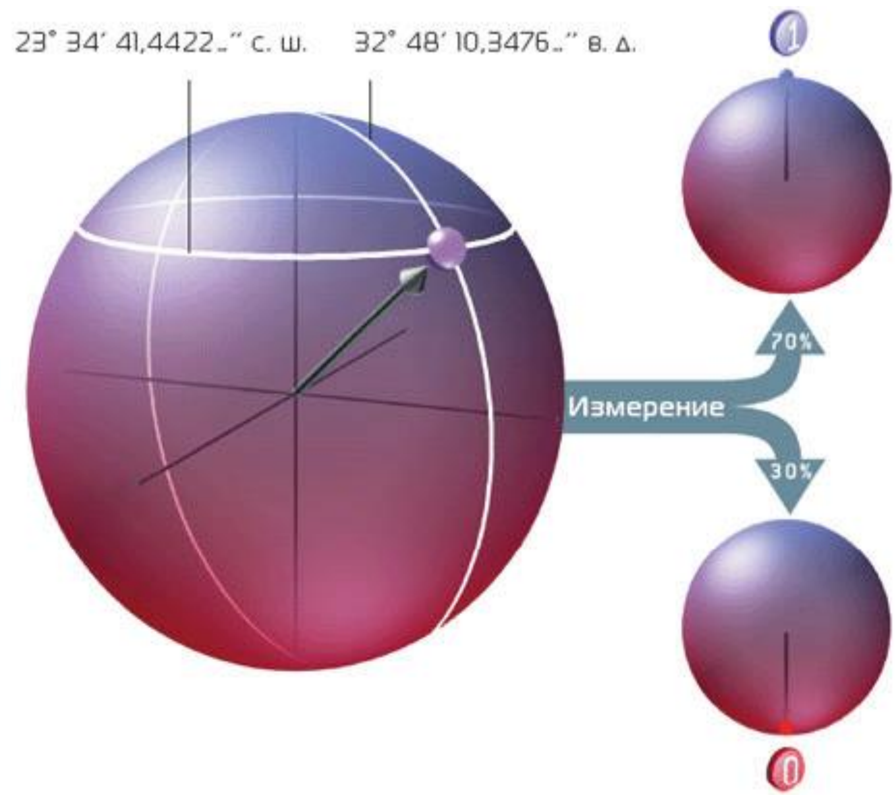
Ее возможные значения – собственные значения (СЗ) оператора:
$Q|\psi\rangle = q|\psi\rangle$
Величина Q имеет определенное значение q_j только если система находится в одном из собственных состояний (СС) оператора Q с собственным вектором (СВ) $|\psi_j\rangle$.
СВ эрмитова оператора образуют базис комплексного гильбертова пространства состояний $|\phi\rangle = \sum a_j |\psi_j\rangle \quad \sum |a_j|^2 = 1$

Основные операции
Проектирование на $|\varphi\rangle$: $T = |\varphi\rangle\langle\varphi|$, $T|\phi\rangle = (\langle\varphi|\phi\rangle)|\varphi\rangle$;

Эволюция состояния: $|\phi(t)\rangle = U|\phi(0)\rangle$, $U^{-1} = U^\dagger$ – унитарный оператор
:
Уравнение Шредингера $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\phi\rangle = H|\phi\rangle \quad U = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int H dt\right)$

бит – это   скаляр, принимающий два базисных значения +1, 0.
кубит — это вектор состояния двухуровневой системы. Базисные состояние обозначаются |0> = |↑> = $(1, 0)^T$ — это вектор-столбец (спин «вверх»); состояние |1> = |↓> = $(0, 1)^T$ — тоже вектор-столбец, но спин «вниз».





ИЗМЕРЕНИЯ В КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

Единичное измерение, "нацеленное" на определение Q , может дать только СЗ оператора Q. Если состояние системы $|\phi\rangle$ не является СС оператора Q, при измерении может быть получено любое СЗ q_j.

Редукция (коллапс): при измерении величины Q исходное состояние $|\phi\rangle$ мгновенно переходит ("проектируется") в некоторое собственное состояние,

$$|\phi\rangle \rightarrow \langle\psi_j|\phi\rangle\,|\psi_j\rangle.$$

Исходное состояние разрушается и не может быть восстановлено.

Вероятность обнаружить систему в СС $|\psi_j\rangle$, если она до измерения находилась в состоянии $|\phi\rangle$:

"квадрат длины" проекции $|\langle\psi_j|\phi\rangle|^2 = |a_j|^2$

Среднее (ожидаемое) значение величины Q в состоянии $|\phi\rangle$:

$$\langle Q\rangle = \langle\phi|Q|\phi\rangle = \mathrm{Sp}(Q|\varphi\rangle\langle\varphi|)$$

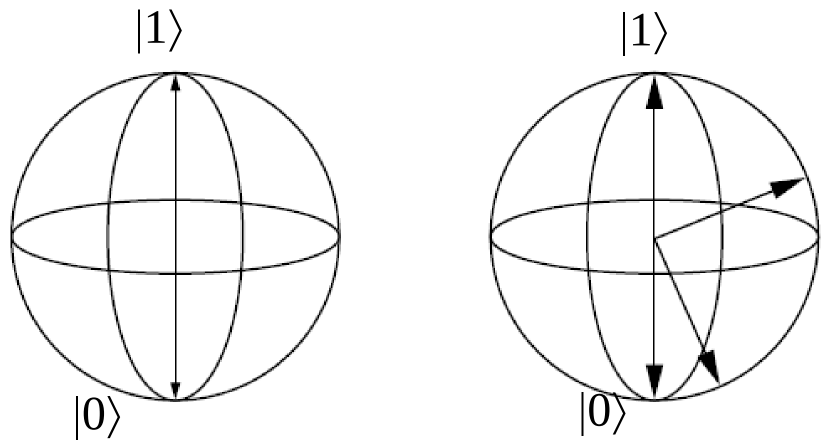
Обобщение: Если система находится в состоянии $|\phi\rangle$, измерение может обнаружить ее в другом состоянии $|\varphi\rangle$; вероятность $|\langle\varphi|\phi\rangle|^2$.

Неполная различимость квантовых состояний: различимыми являются только ортогональные состояния (например, СС эрмитова оператора).

Квантовая информационная ячейка (кубит)

Система с двумя состояниями: 2-уровневый атом, спин, поляризованный фотон, …

Сфера Блоха



В классическом случае ячейка может быть в одном из двух состояний: $|0\rangle$ или $|1\rangle$ (полюса сферы).

В квантовом – состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ образуют ортонормированный базис 2-мерного гильбертова пространства ячейки. Она может находиться в любой суперпозиции базисных состояний, т.е. $|\phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$ (вся сфера).

Кубит содержит больше «степеней свободы» => большее количество информации. Но извлечь можно лишь часть информации: при измерении можно получить только проекции состояния (спина) на выбранное направление. Остальные степени свободы могут использоваться при обработке информации.

Описание единичного кубита

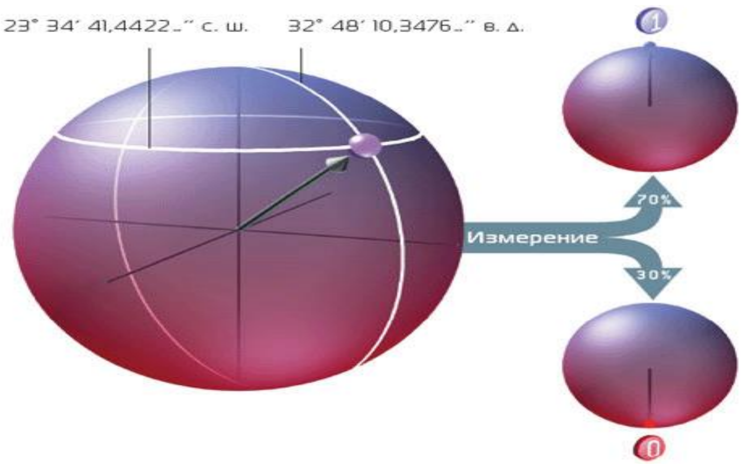
$$|0\rangle = 1\cdot|0\rangle + 0\cdot|1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad |1\rangle = 0\cdot|0\rangle + 1\cdot|1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad |\phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

Операторы, действующие на состояния кубита – 2×2 матрицы

$$Q|\phi\rangle = \begin{pmatrix}q_{11} & q_{12}\\ q_{21} & q_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}q_{11}a + q_{12}b\\ q_{21}a + q_{22}b\end{pmatrix}$$

Все возможные состояния связаны унитарными преобразованиями

$$|\phi\rangle \to U|\phi\rangle \qquad U = \begin{pmatrix} c\exp(-i\alpha) & -t\exp(i\beta)\\ t\exp(-i\beta) & c\exp(i\alpha)\end{pmatrix}, \quad c^2 + t^2 = 1$$



Различимы только ортогональные состояния, например, собственные состояния эрмитовых операторов.

Композитные состояния (квантовые регистры)

В классической физике состояние сложной системы – это совокупность состояний всех образующих ее подсистем.
В квантовой физике – новое качество: Системы многих частиц описываются единой волновой функцией независимо от наличия явного взаимодействия.

$$|\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle = |\phi_A\rangle|\phi_B\rangle = \left(a_A|0_A\rangle + b_A|1_A\rangle\right)\left(a_B|0_B\rangle + b_B|1_B\rangle\right)$$

$$= a_A a_B|0_A\rangle|0_B\rangle + a_A b_B|0_A\rangle|1_B\rangle + b_A a_B|1_A\rangle|0_B\rangle + b_A b_B|1_A\rangle|1_B\rangle$$

$$= a_A a_B|00\rangle + a_A b_B|01\rangle + b_A a_B|10\rangle + b_A b_B|11\rangle$$

Состояния $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$ образуют базис двухкомпонентной системы.
Гильбертово пространство расширяется (удваивается)
Для 3-х частиц

$$|\psi\rangle = a|000\rangle + b|001\rangle + c|010\rangle + d|011\rangle + e|100\rangle + f|101\rangle + g|110\rangle + h|111\rangle$$

n-компонентная система имеет 2^n базисных состояний

Классический регистр из n ячеек: за один такт изменяется максимум n битов
Квантовый регистр из n ячеек: изменение даже одного кубита меняет всю суперпозицию (2^n членов)

Отсюда вытекает вычислительная мощность квантовых компьютеров

$n = 100$ ➔ $2^n = 1.27\cdot 10^{30}$

$n = 300$ ➔ $2^n = 2.04\cdot 10^{90}$ – больше, чем частиц во Вселенной!

Расширение гильбертова пространства при композиции систем описывается прямым (тензорным) произведением векторов состояния.
В матричном представлении

$$\begin{pmatrix} a_A \\ b_A \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_B \\ b_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_A \begin{pmatrix} a_B \\ b_B \end{pmatrix} \\ b_A \begin{pmatrix} a_B \\ b_B \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_A a_B \\ a_A b_B \\ b_A a_B \\ b_A b_B \end{pmatrix} = a_A a_B |00\rangle + a_A b_B |01\rangle + b_A a_B |10\rangle + b_A b_B |11\rangle$$

Операторы, действующие на композитную систему: прямое произведение матриц, действующих на подсистемы

$$\begin{pmatrix} a_A & b_A \\ c_A & d_A \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_B & b_B \\ c_B & d_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_A \begin{pmatrix} a_B & b_B \\ c_B & d_B \end{pmatrix} & b_A \begin{pmatrix} a_B & b_B \\ c_B & d_B \end{pmatrix} \\ c_A \begin{pmatrix} a_B & b_B \\ c_B & d_B \end{pmatrix} & d_A \begin{pmatrix} a_B & b_B \\ c_B & d_B \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Запутанные состояния (Entangled states)

Запутанные состояния – такие, для которых факторизация невозможна:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0_A\rangle|0_B\rangle+|1_A\rangle|1_B\rangle\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle+|11\rangle\right);\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0_A\rangle|1_B\rangle-|1_A\rangle|0_B\rangle\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle-|10\rangle\right)$$

Здесь нельзя вычленить вклад одной или другой частицы: их состояния «перепутаны»

Противоположный пример: композитное состояние $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0_A\rangle|0_B\rangle+|0_A\rangle|1_B\rangle\right)$

может быть представлено в виде $|0_A\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0_B\rangle+|1_B\rangle\right)$

Вклады отдельных частиц разделяются, состояние факторизуемое

Вектор состояния композитной системы $|\phi_{AB\ldots C}\rangle$ выражает всю доступную информацию о системе, но в случае запутанного состояния не дает полного знания о составляющих подсистемах.

В классической физике знание целого означает знание частей, в квантовой – нет.

Для подсистем – только вероятности того или иного состояния.

Матрица плотности : $\rho = \sum_j p_j \left|\psi_j\right\rangle\left\langle\psi_j\right|$

Среднее значение физической величины

$$\langle Q\rangle = \sum_j p_j \left\langle\psi_j\right|Q\left|\psi_j\right\rangle = \sum_i \langle\psi_i|\rho Q|\psi_i\rangle = \mathrm{Sp}(Q\rho)$$

Состояние, которое описывается не вектором $|\psi\rangle$, а оператором ρ, называется смешанным;

Чистое состояние получается, когда все $p_j = 0$, кроме одной. Для него $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$

Матрица плотности подсистемы: $\rho_A = \mathrm{Sp}_B(\rho_{AB}) = \sum_j \left\langle\psi_{Bj}\right|\rho_{AB}\left|\psi_{Bj}\right\rangle$

$$\left|\psi_{AB}\right\rangle = a\left|0_A\right\rangle\left|0_B\right\rangle + b\left|1_A\right\rangle\left|1_B\right\rangle$$

$$\rho_{AB} = \left|\psi_{AB}\right\rangle\left\langle\psi_{AB}\right| = \left(a\left|0_A\right\rangle\left|0_B\right\rangle + b\left|1_A\right\rangle\left|1_B\right\rangle\right)\left(a^*\left\langle 0_B\right|\left\langle 0_A\right| + b^*\left\langle 1_B\right|\left\langle 1_A\right|\right) =$$

$$= |a|^2\left|0_A\right\rangle\left|0_B\right\rangle\left\langle 0_B\right|\left\langle 0_A\right| + ab^*\left|0_A\right\rangle\left|0_B\right\rangle\left\langle 1_B\right|\left\langle 1_A\right| +$$

$$+ a^*b\left|1_A\right\rangle\left|1_B\right\rangle\left\langle 0_B\right|\left\langle 0_A\right| + |b|^2\left|1_A\right\rangle\left|1_B\right\rangle\left\langle 1_B\right|\left\langle 1_A\right|$$

$$\rho_A = \mathrm{Sp}_B(\rho_{AB}) = \left\langle 0_B\right|\rho_{AB}\left|0_B\right\rangle + \left\langle 1_B\right|\rho_{AB}\left|1_B\right\rangle = |a|^2\left|0_A\right\rangle\left\langle 0_A\right| + |b|^2\left|1_A\right\rangle\left\langle 1_A\right|$$

В смешанном состоянии отсутствует информация о фазе компонент

Измерение запутанных состояний

Запутанность может сохраняться, даже если подсистемы пространственно разделены

Можно наблюдать и измерять состояние отдельной подсистемы.

Вся система $\left|\psi_{AB}\right\rangle = a\left|0_A\right\rangle\left|1_B\right\rangle + b\left|1_A\right\rangle\left|0_B\right\rangle$

Наблюдается подсистема B

При измерении она может быть найдена в состоянии $|0_B\rangle$ или $|1_B\rangle$

Пусть обнаружено состояние $|1_B\rangle$: начальное состояние $|\psi_{AB}\rangle$ "проектируется" на $|1_B\rangle$

$$\left|\psi_{AB}\right\rangle \to \left\langle 1_B \middle| \psi_{AB}\right\rangle\left|1_B\right\rangle = \left(a\left\langle 1_B \middle| 0_A\right\rangle\left|1_B\right\rangle + b\left\langle 1_B \middle| 1_A\right\rangle\left|0_B\right\rangle\right)\left|1_B\right\rangle =$$

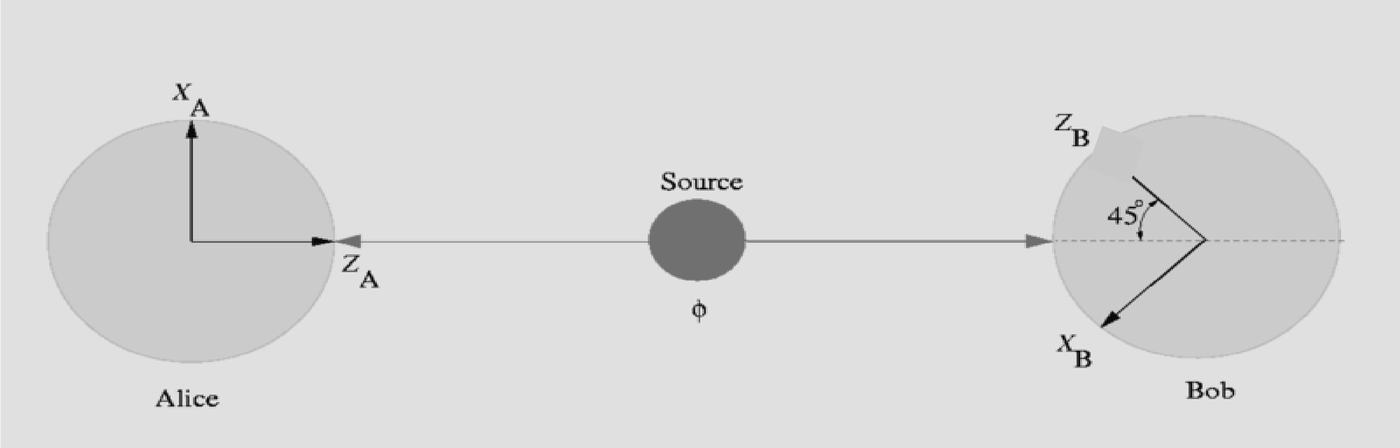
$$= \left(a\left\langle 1_B \middle| 1_B\right\rangle\left|0_A\right\rangle + b\underbrace{\left\langle 1_B \middle| 0_B\right\rangle}_{=0}\left|1_A\right\rangle\right)\left|1_B\right\rangle = a\left|0_A\right\rangle\left|1_B\right\rangle$$

Если в результате редукции, вызванной измерением, частица B оказывается в состоянии $|1_B\rangle$, то слагаемые $|\psi_{AB}\rangle$, где содержатся другие ортогональные состояния этой частицы, исчезают.

Частица A неизбежно оказывается в том состоянии, которое «сцеплено» с $|1_B\rangle$, найденным при измерении B (в данном случае $|0_A\rangle$)

Вероятность обнаружить частицу B в состоянии $|1_B\rangle$:
"квадрат длины" проекции $|\langle 1_B|\psi_{AB}\rangle|^2$

Парадокс Эйнштейна – Подольского – Розена (ЭПР)



Источник создает пару электронов в синглетном состоянии (спины антипараллельны)

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+z_A\rangle|-z_B\rangle - |-z_A\rangle|+z_B\rangle\right)$$

Наблюдатель A измеряет спин и находит состояние $|+z_A\rangle$

Соответствующая проекция начального состояния $\langle +z_A|\psi_{AB}\rangle|+z_A\rangle \sim |-z_B\rangle|+z_A\rangle$;
Наблюдатель B со 100% вероятностью найдет состояние $|-z_B\rangle$

Электрон у B мгновенно «узнает» о результате измерения у A:
сверхсветовая связь???

Квантовые корреляции и скрытые переменные

Взаимозависимость отдельных подсистем в запутанном (сцепленном) состоянии – это проявление квантовых корреляций, которые обусловлены не силовым, а «конфигурационным» взаимодействием.

Гипотеза: кроме вектора состояния, существуют еще параметры, которых не хватает в теории и которые содержат необходимые «инструкции» для поведения отдельных подсистем (например, спина В после измерения спина А). Отдаленная аналогия: Газовые законы

Теорема Белла (1964): Не существует физической теории с локальными скрытыми переменными, которая объяснила бы все предсказания квантовой механики.

Эксперименты с поляризацией фотонов поддерживают квантовую точку зрения.

Значение теоремы no cloning

Подтверждает невозможность неразрушающих измерений квантового объекта.

Запрещает классическую коррекцию ошибок: невозможно создавать резервные копии промежуточных результатов.

•При передаче квантовой информации: не позволяет тайно создавать копии передаваемого шифрованного сообщения (защита от "подслушивания").

•"Спасает" принцип неопределенности: если допустить копирование неизвестного квантового состояния, то по одной копии можно измерить координату, а по другой – импульс.

•Предотвращает сверхсветовую коммуникацию посредством запутанных состояний:

•в мысленном эксперименте ЭПР B мог бы сделать много копий своего электрона и оценить вероятности полученных результатов:

•если все время получается спин $|-z_B\rangle$, значит A производит измерение вдоль той же оси z;

•если с вероятностью ½ получается $|+z_B\rangle$ и $|-z_B\rangle$, значит A производит измерение спина вдоль ортогональной оси.

•Теорема не запрещает создание копии с разрушением исходного состояния.

•Некоторые исключительные состояния копировать можно: например, базисные СС эрмитовых операторов.

Состояния Белла

Мы ввели "естественные" базисные состояния двухкомпонентной квантовой системы

$$|0\rangle|0\rangle, \quad |0\rangle|1\rangle, \quad |1\rangle|0\rangle, \quad |1\rangle|1\rangle$$

Эти базисные состояния мультипликативны (не "запутаны").

Можно ввести линейные комбинации этих базисных состояний

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle\right) \qquad |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle\right)$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle\right) \qquad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle\right)$$

Эти состояния тоже образуют ортонормированный базис двухкомпонентной системы,

$$|\phi\rangle = a|\Phi^+\rangle + b|\Phi^-\rangle + c|\Psi^+\rangle + d|\Psi^-\rangle$$

В частности,

$$|0\rangle|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Phi^+\rangle + |\Phi^-\rangle\right) \qquad |1\rangle|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Phi^+\rangle - |\Phi^-\rangle\right)$$

$$|0\rangle|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Psi^+\rangle + |\Psi^-\rangle\right) \qquad |1\rangle|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Psi^+\rangle - |\Psi^-\rangle\right)$$

Состояния $|\Phi^\pm\rangle$, $|\Psi^\pm\rangle$ были введены Беллом. Они "максимально запутаны".
Удобны для анализа явлений, связанных с "запутанностью".

Передача квантовой информации. Телепортация

A — Надо передать информацию, содержащуюся в кубите O — B

O: $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

Предварительно: у A есть кубит A, у B – кубит B, которые находятся в общем запутанном состоянии

Состояния Белла: базис общего гильбертова пространства кубитов A и B

$$\left\{\begin{aligned}
|\Phi^+{}_{AB}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0_A\rangle|0_B\rangle + |1_A\rangle|1_B\rangle\right)\\
|\Phi^-{}_{AB}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0_A\rangle|0_B\rangle - |1_A\rangle|1_B\rangle\right)\\
|\Psi^+{}_{AB}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0_A\rangle|1_B\rangle + |1_A\rangle|0_B\rangle\right)\\
|\Psi^-{}_{AB}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0_A\rangle|1_B\rangle - |1_A\rangle|0_B\rangle\right)
\end{aligned}\right.$$

A владеет 2 кубитами (O, состояние которого надо передать B, и A – один из сцепленной пары).

Все три частицы образуют состояние

$$|\psi\rangle|\Phi^+{}_{AB}\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0_A\rangle|0_B\rangle + |1_A\rangle|1_B\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\boxed{|0\rangle|0_A\rangle} + \beta\boxed{|1\rangle|0_A\rangle}\right)|0_B\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\boxed{|0\rangle|1_A\rangle} + \beta\boxed{|1\rangle|1_A\rangle}\right)|1_B\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Phi^+{}_{OA}\rangle + |\Phi^-{}_{OA}\rangle\right) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Psi^+{}_{OA}\rangle - |\Psi^-{}_{OA}\rangle\right) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Psi^+{}_{OA}\rangle + |\Psi^-{}_{OA}\rangle\right) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Phi^+{}_{OA}\rangle - |\Phi^-{}_{OA}\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}|\Phi^+{}_{OA}\rangle\left(\alpha|0_B\rangle + \beta|1_B\rangle\right) + \frac{1}{2}|\Phi^-{}_{OA}\rangle\left(\alpha|0_B\rangle - \beta|1_B\rangle\right) + \frac{1}{2}|\Psi^+{}_{OA}\rangle\left(\beta|0_B\rangle + \alpha|1_B\rangle\right) + \frac{1}{2}|\Psi^-{}_{OA}\rangle\left(-\beta|0_B\rangle + \alpha|1_B\rangle\right)$$

A производит измерение своих частиц в белловском базисе $|\Psi^\pm{}_{OA}\rangle$, $|\Phi^\pm{}_{OA}\rangle$; состояние системы коллапсирует к одному из слагаемых.

Сцепление кубитов A и B разрушается, кубиты у A (O и A) оказываются сцепленными (в одном из белловских состояний), кубит B "перенимает" информацию о кубите O

Выводы: ИНФОРМАЦИЯ В КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

Физический объект (система) характеризуется вектором состояния $|\psi\rangle$

Для векторов состояния определено скалярное произведение $\langle\phi|\psi\rangle$

Нормировка $\langle\psi|\psi\rangle = 1$; $|\psi\rangle$ определен с точностью до постоянного фазового множителя e^{ia} (состояния $|\psi\rangle$ и $e^{ia}|\psi\rangle$ физически тождественны); $|\langle\phi|\psi\rangle| \le 1$. Переход от одного состояния к другому описывается оператором: $|\psi\rangle \to A|\psi\rangle$

ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ: если $|\psi\rangle$ и $|\phi\rangle$ – возможные состояния системы, то она может находиться и в суперпозиционном состоянии $a|\psi\rangle + b|\phi\rangle$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Выводы: Бит vs Кубит

Итак, бит – это скаляр, принимающий два базисных значения +1, 0.
кубит — это вектор состояния двухуровневой системы. Базисные состояние обозначаются |0> = |↑> = $(1, 0)^T$ — это вектор-столбец (спин «вверх»); состояние |1> = |↓> = $(0, 1)^T$ — тоже вектор-столбец, но спин «вниз».