



КАФЕДРА
ТЕЛЕМАТИКА

Санкт-Петербургский
Государственный
Политехнический
Университет

Институт прикладной
математики и механики

**История и методология математики и
компьютерных наук**

Лекция 11

**«Вычислительная основа
физических законов и
информационных ограничений»**

часть 2

26 ноября 2020 г.

- Количественное описание – важная составляющая научной интерпретации свойств Природы. Количество информации – есть характеристика разнообразия или неопределенности, но «что такое количество информации?» различным образом решают на разных стадиях развития математики и ее приложений.
- Так в физике принят принцип информационной эквивалентности инерциальных систем координат: неопределенность описания объекта одинакова во всех инерциальных системах координат;
- Вероятностная природа результатов измерений (результат того, что принять за результат измерения) позволяет получить адекватные модели объектов как в «пространстве-времени» , так и на уровне информационного описания процессов.
- Описание замкнутых и открытых систем основано на использовании разных «носителей» - алгебраических или множество объектов, информационных множество процессов-связей объектов.

Модели - числа

- По аналогии с операциями с числами, можно производить операции и со составными математическими объектами: с «кольцами», конкретными группами, полями.
- Естественные обобщения позволяют «работать» с абстрактными группами – совокупностью элементов со строго очерченными свойствами, для которых важна структура группы, а не особенность элемента группы.
- В принципе можно рассматривать «сеть» отношений между группами – это уже новый математический объект – категория. Сети взаимосвязей (групп, полей, пространств и т. д.) – универсальны. Если Мир представить как некую алгебраическую систему, то связи между объектами можно свести к новой категории, назвав ее «реальность». Это будет множество объектов, которые преобразовываются с помощью «законов» физики.

История вопроса: от теории множеств к теории категорий

- Если окружающий Мир – это мир процессов, а не мир объектов, то для его адекватного описания нужен «язык описания процессов», а не множеств.
- В рамках теории множеств считается, что любой объект исследований должен принадлежать некоторому множеству. При выполнении операций с объектами несущее множество не меняется.
- В теории категорий **преобразования** объектов (объекты – аналоги множеств, преобразования – аналоги отображений) входят в аксиоматическое определение наравне с объектами. В итоге объекты оказываются предельным случаем (результатом) преобразований. Предметом исследования становятся совокупности способов преобразований объектов, т.е. процессы.

Категории как «язык» описания процессов

- Особенность категорий – возможность оперировать сразу всей совокупностью одинаково структурированных множеств, которые позволяет отождествить эту совокупность с пространством всех возможных состояний системы.
- В категорию наряду со структурированными объектами входят все допустимые этой структурой способы **изменения** объектов, т.е. преобразования состояний системы. Это позволяет заменить теоретико-множественное идеализированное представление Мира в виде "застывших" объектов на адекватное **представление Мира с помощью процессов**.

Подробности

- Теоретико-категорный язык богаче языка теории множеств. Для одного и того же набора множеств – объектов категории – может существовать много различающихся наборов морфизмов, т.е. преобразований объектов этих множеств.
- Категории с одинаковыми объектами, но различающимися морфизмами – это уже различные категории.
- Неразличимые как множества объекты могут быть различимы по возможностям преобразования этих объектов.

Мир процессов – это мир времени

- Согласно современным представлениям, время – это свойство открытых систем. Описание меняющихся систем, строго говоря, не доступно теоретико-множественной математике, поскольку для этих систем в различные моменты времени не выполняется аксиома экстенциональности, требующая, в частности, тождественности множества самому себе во все моменты времени.
- Формально проблемы времени решают введением структур, в которых помимо самих множеств-объектов фигурируют некое априорное абстрактное базовое множество, играющее роль "оси времени".
- Во временном описании все состояния системы альтернативны.

Суперпозиция в пространстве состояний

- Время – это специальное множество состояний, в котором истинность одних состояний из них исключает "одновременную" истинность других.
- В этом смысле пространство состояний динамического объекта как множество обладает "вневременными" свойствами: все состояния сосуществуют в нем (независимо от момента времени, в который они реализуются), находясь в абстрактной суперпозиции, а не альтернативе.
- Поиск реально осуществляющихся состояний систем среди всех потенциально возможных состояний в методологии экстремальных принципов требует умения, во-первых упорядочить состояния между собой на шкале "больше-меньше", "сильнее-слабее" и т.п. и, во-вторых, – выбрать экстремальное из этих состояний в полученном упорядочении

Применение экстремальных принципов для описания сложных систем

- На языке математических структур умение упорядочить структурированные множества, описывающие систему, и выбрать наиболее "сильную" (или наиболее "слабую") структуру в качестве той, что реализуется в действительности— есть умение ввести на множестве не только тривиальную количественную меру , которая есть производная от понятия «количество элементов».
- Необходимо обобщение понятия «количество» для структурированных множеств. Такое обобщение дает метод функторного сравнения структур в теоретико-категорном описании систем.

«Новые» законы

- Законы функционирования (они же – законы динамической изменчивости, уравнения обобщенного движения) сформулированы далеко не для всех объектов научных исследований.
- Методология поиска таких законов составляет важную проблему теоретического знания, не решенную до настоящего времени. Пока в методах научного описания мира существует крайне ограниченный набор формальных способов вводить основные законы изменчивости исследуемых систем.
- В настоящее время законы физики даются в форме «уравнений движения» или в форме некоего экстремального принципа.

Структурированные множества

- Умение сравнивать структурированные множества на языке теории категорий позволяет: сформулировать на этом языке экстремальный принцип, рассчитывать (а не угадывать) соответствующие функционалы и применять обобщение вариационного формализма Джейнса для самого широкого круга задач моделирования

Морфизмы и структуры

- многообразиие аксиоматических систем (число их типов) ограничено: структуры порядка, топологические и алгебраические структуры
- если задана математическая структура, то всегда возможно задать сохраняющие ее морфизмы.
- Необходимость обратного утверждения для приложений не обязательна: если заданы морфизмы, то может и не существовать математической структуры с известной аксиоматикой, которую они "сохраняют".

Математическая теория категорий и функторов

- Все началось с группы гомологий.
- теория категорий и функторов является универсальной формой математического описания свойств реального Мира, которое формулируется в терминах математических (алгебраических) структур.

Роль категорий, функторов и топосов в проблеме единства естественнонаучной методологии.

- Познание основано на «опыте распознавания структур» через
 - принцип суперпозиции (запутанные состояния),
 - локальность,
 - причинность



Истинность в форме законов сохранения – информационные и физические аспекты

- Преобразования состояний в **КОМПЛЕКСНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ**, сохраняющие вероятностную структуру этих состояний (сумма вероятностей полученных при измерении **БАЗИСНЫХ** состояний **ИСХОДНОГО** состояния равна единице) происходят без затраты энергии и представляются вещественными числами.
- Преобразования состояний в действительном евклидовом пространстве, сохраняющие вероятностную структуру состояний (сумма вероятностей получения при измерении одного из базисных состояний исходного состояния равна единице), являются энергозатратными.

Следствия: «Законы» информационной простоты

На фундаментальном уровне реализуются самые простые информационные преобразования:

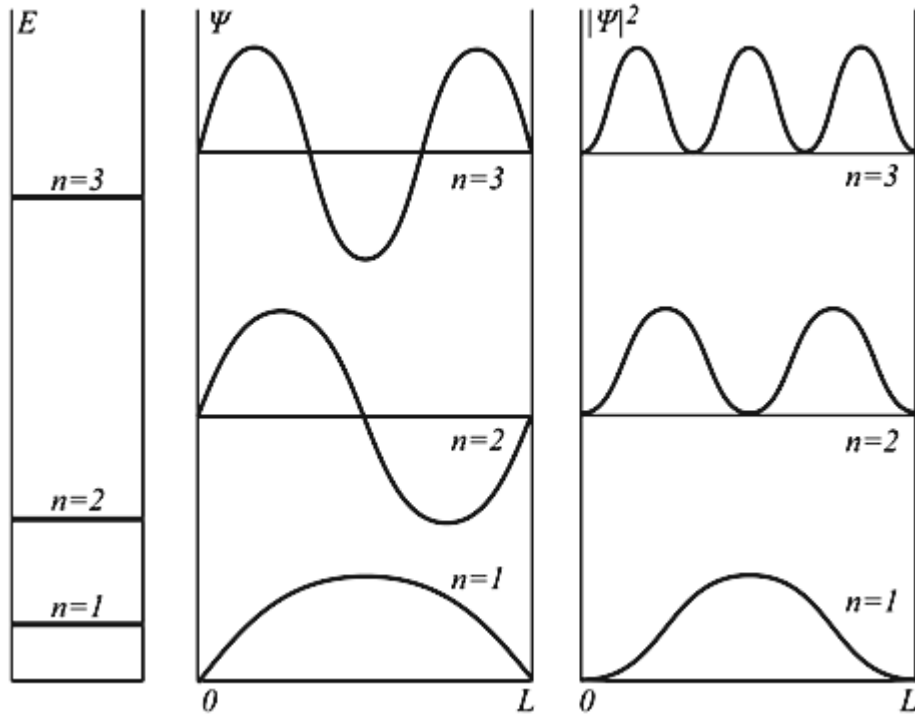
- Трансляционные (сдвиг) , группы вращения, линейные преобразования координат.

Результаты измерения «наблюдаемых» при таких преобразованиях являются рациональными числами.

Предварительные выводы о реализуемости физических преобразований

- При преобразованиях систем координат неопределенность (информация) сохраняется в том и только в том случае, когда значение якобиана преобразования равно единице, а сами преобразования происходят без затраты энергии
- Неопределенность (информация) сохраняется в том и только в том случае, когда значение определителя линейного преобразования координат равно единице.

Реальность «волновых функций» состояния



E - уровни энергии

Ψ - Волновые функции частицы Ψ_i в прямоугольной потенциальной яме.

$|\Psi|^2$ - квадрат модуля волновой функции или вероятность нахождения частицы в i -ом состоянии



Физические преобразования,

Суть – поиск преобразований, которые сохраняют неопределенность данных (информацию)

- Трансляционные преобразования
- Собственные вращения
- Преобразования классической механики
- Преобразования специальной теории относительности (преобразования Лоренца)

Все преобразования, которые меняют «неопределенность» состояния системы физически **необратимы или нереализуемы**.

Например, обращение времени «открытой» системе изменяет «неопределенность» текущего состояния системы, поэтому физически нереализуемо

Однородность и изотропность пространства физической реальности – информационные аспекты

- Пространство подразумевается существующим во времени как единое целое. Поэтому можно также говорить об едином пространстве-времени.
- Вполне уместно такое пространство полагать **однородными и изотропными**, что соответствует закону «информационной» простоты.
- Если это не полагать, то описание Мира стало бы более сложным, чем то, которое используется со времен Ньютона.

Выводы из «информационных» законов природы

- Физическая реализуемость трансляционного преобразования времени (сдвиг по времени) означает **однородность времени**.
- Физическая реализуемость трансляционного преобразования пространства (перемещение) означает **однородность пространства**.
- Физическая реализуемость преобразования вращения пространства означает его изотропность (т.е. связь между элементами пространства не зависит от выбранного направления).

Законы сохранения – информационные аспекты

- Из однородности времени (свойства времени во всех направлениях одинаковы) следует закон сохранения энергии.
- Из однородности пространства следует закон сохранения импульса.
- Из изотропности пространства следует закон сохранения момента импульса.

Информационная емкость Вселенной

Каков объем информации содержится во Вселенной ?

- Масса обычного вещества Вселенной и черных дыр равна 10^{52} кг
- Поэтому **минимальный** объем информации равен 10^{91} бит.

Зная это можно определить структуру Вселенной с минимальным объемом информации. **Максимально** возможный объем информации во Вселенной содержится, если Вселенная представляет собой одну черную дыру, равен 10^{120} бит .

Тогда, если во Вселенной имеются два типа массы: с квадратичной связью между информацией и массой (черные дыры), и линейной связью между информацией и массой (обычное вещество), то существует конструкция Вселенной, при которой объем информации минимален.

Вселенная массы M , состоящая из черных дыр и только из черных дыр данной массы, содержит минимально возможный объем информации $I_{bc} \min = Mc^2 / (2kT \ln 2)$ бит

Вселенная содержащая **конечный объем информации** эффективно познаваема

Информация и познаваемость

- Познание системы с конечной информацией внешним наблюдателем возможно тогда и только тогда, когда его разнообразие R_o превосходит разнообразие наблюдаемой системы: $R_s < R_o$.
- Познание части системы с конечной информацией внутренним наблюдателем возможно тогда и только тогда, когда его разнообразие R_{oi} превосходит разнообразие наблюдаемой части системы R_{os} : $R_{os} < R_{oi}$. Поскольку внутренний наблюдатель является частью системы, то его разнообразие плюс разнообразие наблюдаемой части системы не может быть больше разнообразия R_s всей системы (предполагаем, что разнообразие аддитивно) $R_{os} + R_{oi} \leq R_s$

Вывод (1): Общность информационного подхода

- Поскольку информационные характеристики и свойства неоднородностей, одинаковы во всех Вселенных, то одинаковы и информационные законы. Так как физические законы сохранения следуют из информационных законов, то физические законы сохранения одинаковы во всех Вселенных. Одинаковы и информационные ограничения на другие физические законы в разных Вселенных.

Вывод (2)

- нетривиальные результаты физических теорий (например, теорема о невозможности клонирования квантового состояния, квантовая телепортация и т. п.) становятся очень естественными в категорной формулировке
- категории являются гибким «шаблоном», с уже готовыми конструкциями и теоремами, на основе которых можно строить самые разные физические теории

- Физика запрещает передачу информации «в пространстве-времени» со сверхсветовой скоростью. Это объясняется принципиально вероятностным характером измерений и теоремой о запрете клонирования.
- Вероятностная природа измерений (результат того, куда перейдет суперпозиция – случаен) открывает новые возможности не только описания, но и формирования реальности за счет т.н. слабых квантовых измерений (англ. weak quantum measurement), когда заданная последовательность таких измерений прерывается, когда достигнуто «желаемое» состояние.
- Стабильные и самоподдерживающимся суперпозиции могут существовать как на квантовом уровне (в «пространстве-времени» так и на макроскопическом уровне (информационно-вычислительное пространство)