



Санкт-Петербургский
Государственный
Политехнический
Университет

Институт прикладной
математики и механики

**История и методология математики и
компьютерных наук**

Лекция 1

**«Книга природы написана
на ...языке математики»**

Г. Галилей

3 сентября 2020 г.

Тематика лекций

- **Тема 1. Философия математики.** Математика как фундаментальная и прикладная наука. Числа и операции. Место математики в современной системе знаний. Основные принципы, теоремы и структуры.
- **Тема 2. Математика, информатика и физика** Технологии и средства вычислений. Физические носители информации, информационное взаимодействие .
- **Тема 3. Математика и компьютерные науки.** Вычислительные и информационные процессы. Математические и вычислительные структуры.
- **Тема 4. Машинное обучение и ИИ** Программы и алгоритмы: from data-driven to knowledge-drive computing . Натуральные вычисления. Квантовая информация

Общая характеристика обсуждаемых проблем

Математика

- Логика, арифметика, квалиметрия моделей
- Теория алгоритмов: вычислимость, перечислимость, разрешимость

Компьютерные науки

- Использование вычислений с плавающей точкой, половинной точности для ускорения решения систем линейных уравнений
- Параллелизм выполнения задач
- Разработка для гетерогенных систем с помощью OpenCL
- OpenCAPI: ускорение ускорителей
- Функциональное программирование

Машинное обучение и искусственный интеллект

- Проблема неалгоритмического решения задач
- От арифметического «равенства» на основе формальных доказательств к «эквивалентности» на основе семантических правил

Введение: Число, строгость, непротиворечивость

- «Все есть число», **Пифагор**
(Вещь может быть познана только через раскрытие ее числа).
- Строгость математического рассуждения объясняется простотой ее предмета. **Аристотель**
- Существуют математические теории, которые не обладают априорной наглядностью и самоочевидной основой. **Лобачевский**
- От математической теории не требуется ни наглядности, ни рациональной очевидности, существенно только требование логической непротиворечивости. **Гильберт**

Что говорят о математике «Великие» :

- «Математика — язык, на котором написана **«книга природы»** (Г. Галилей)
- «Математика – это способ описания перехода от одних **опытных суждений**, к другим»(Н. Бор)
- «Математика – иерархия **формальных структур**»(Н. Бурбаки)
- «Математика — наука о количественных отношениях и пространственных формах **действительного мира**»(А. Колмогоров)

МАТЕМАТИКА или математические науки – все ли так?!

- **17 век:** Cogito, ergo sum (лат. — «**Мыслю, следовательно, существую**»)



- **21 век:** Computo, ergo sum (лат. - «**Вычисляю, значит существую**»).
- Вопрос об отношении математики к реальному миру является одним из основных для объяснения природы математики как науки.

Пример: Информационно-Вычислительный натурализм: законы физики – «**компьютерные**» программы, а Вселенная - **квантовый компьютер**, который вычисляет самого себя?!

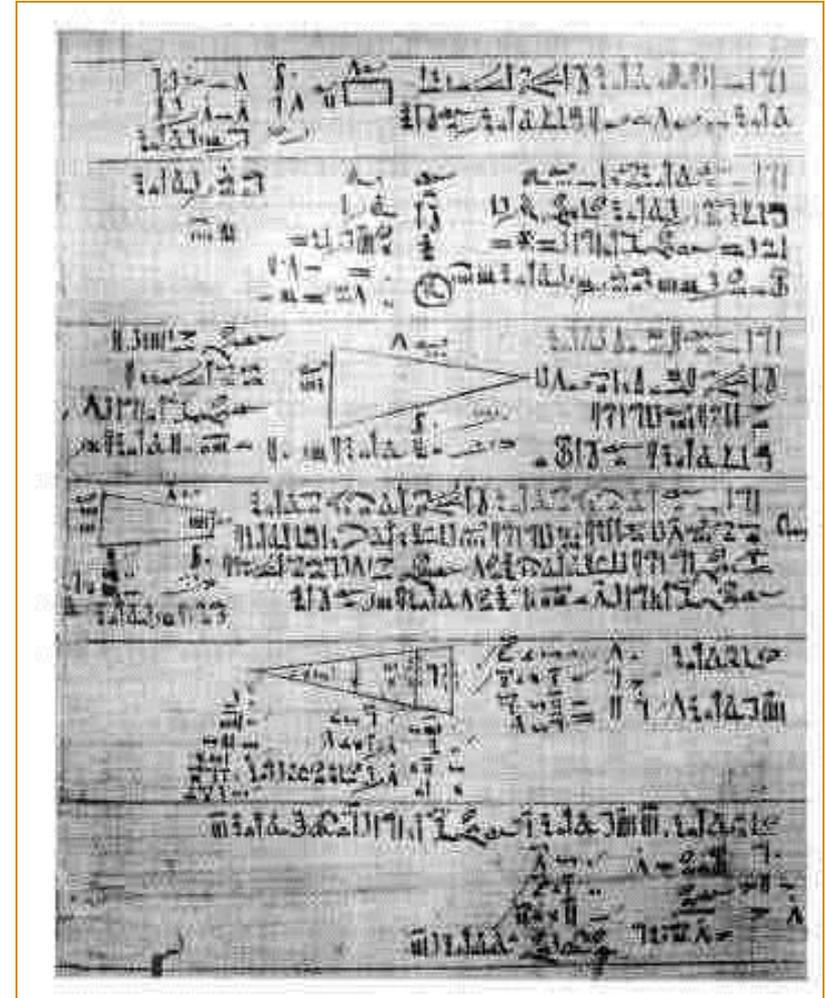


Философия математики:

- Специфика математической реальности
- Статус математического понятия
- Классификация математики
- Математика и физика
- Математика и биология

Древний Египет

- Папирус Ринда - собрание 84 задач прикладного характера.
- При решении задач производятся действия с дробями, вычисляются площади прямоугольника, треугольника, трапеции и круга, объёмы параллелепипеда, цилиндра, размеры пирамид.



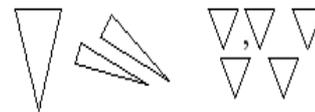
Древний Вавилон (Двуречье)

XXIII в. до н.э. – регулярные работы по строительству

Требования к «математике»:
«уметь писать понятно, знать текст, межевать земли и примерять спорящих»

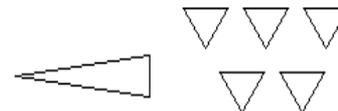
Знака для нуля у вавилонян сначала не было. Позже был введён знак , заменявший современный ноль.

Так записывали число 3605:

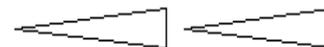


т.е.  = $60^2 = 3600$;

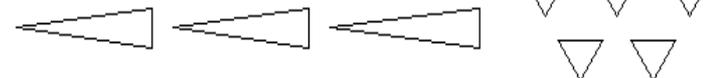
Задача № 1: Записать число 15



Задача № 2: Записать число 20;



Задача № 3: Записать число 35:



Задача № 4: Записать число 3602;



Достижения Вавилонской математики

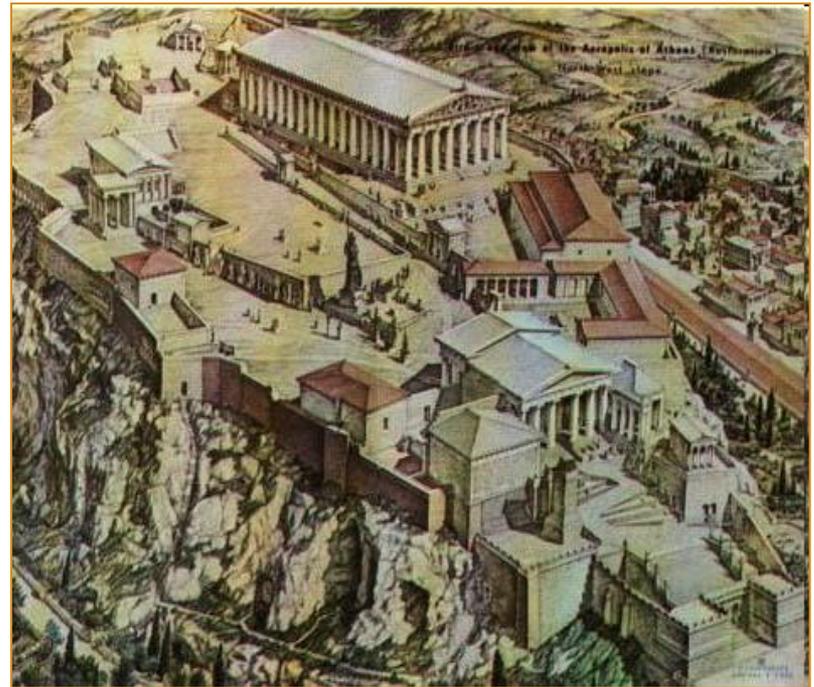
- Шестидесятеричная система исчисления
- Использование:
- **ноля** как пунктуационного знака, определяющего разряд числа,
- **дроби** для записи результатов математических операций

Что умели:

- извлекать квадратные корни
- решать линейные и кубические уравнения с помощью таблиц
- Проводить измерения, связанные с окружностями

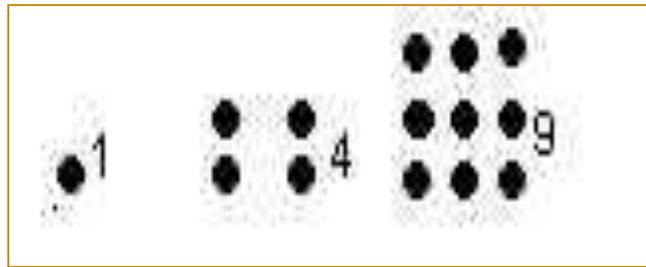
Древняя Греция VI – IV вв. до н.э.

- Математика оформляется как наука с особым методом **дедуктивного (формального) доказательства**



Математика геометров (Пифагор, Эвклид) и астрономов (Птолемей)

Квадратные числа:



Вводят доказательство, в том числе, доказательство от противного, логика (закон «исключенного третьего»)

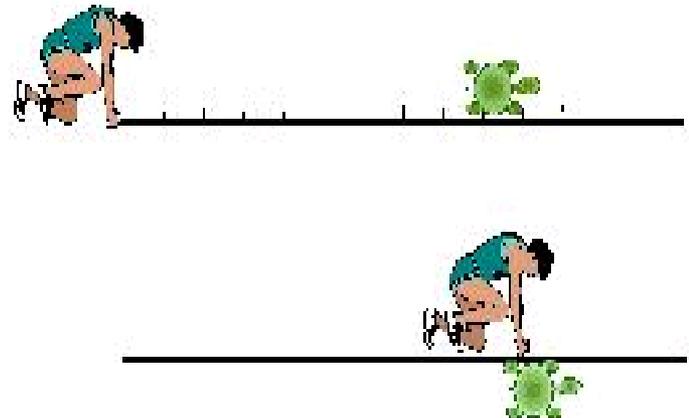
Числа:

- Четные – мужские
- Нечетные – женские

«Элементы чисел являются элементами всех вещей и весь мир является гармонией и числом»

Зенон Элейский – проблема конечного и бесконечного

- Апории:
- «Ахиллес и черепаха»
- «Стрела»
- «Стадион»
- «Дихотомия»



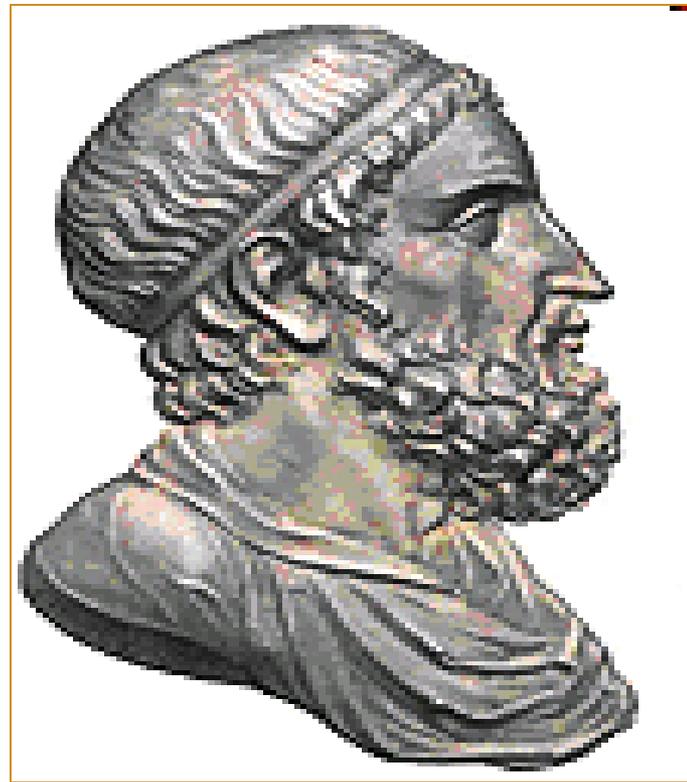
Евклид (IV – III вв. до н.э.)

- «Начала» - логическое построения геометрии на основе аксиоматики
- планиметрия, стереометрия, вопросы теории чисел, алгебры, общей теории отношений и метода определения площадей и объемов,

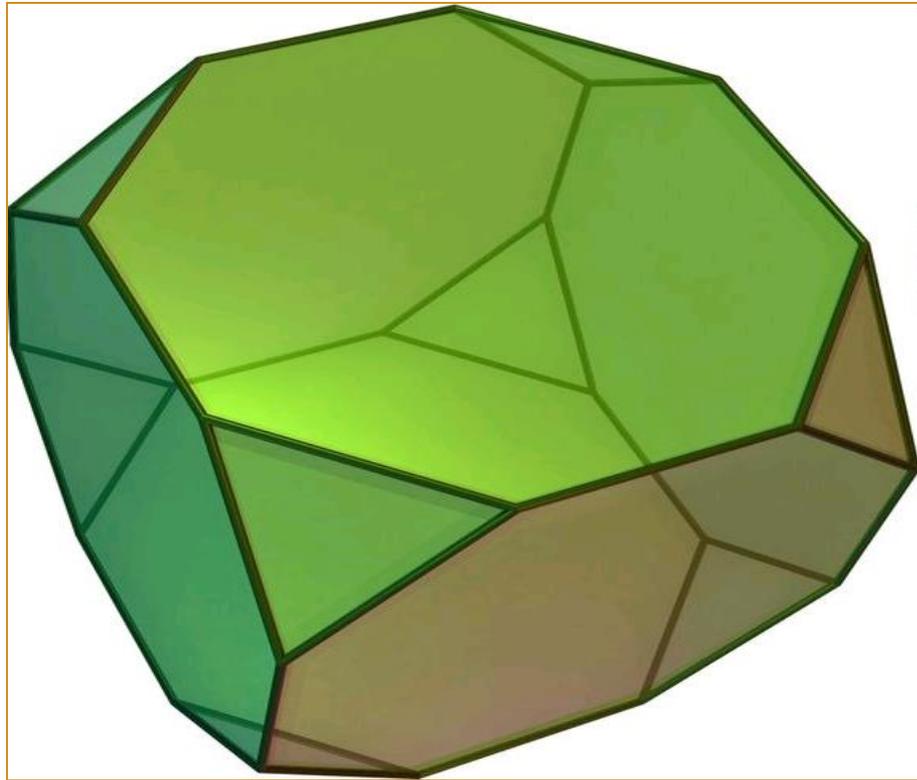


Архимед (287 – 212 Г. до н.э.)

- Трактат "Псаммит" в котором он указывает способ для вычисления количества песчинок, могущих заключиться в объеме земного шара.



Полуправильные многогранники (Архимедовы тела)



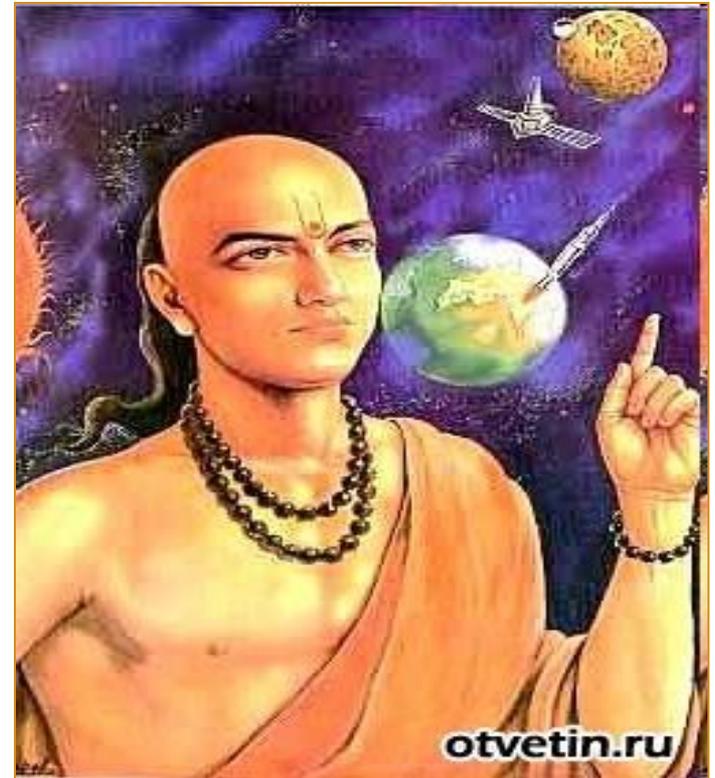
Усеченный куб

Греческие основатели современной математики:

- Архид из Тарента (V – IV вв. до н.э.)
- Евдокс Книдский (V – IV вв. до н.э.)
- Антифон (V – IV вв. до н.э.)
- Гиппократ Хиосский (V – IV вв. до н.э.)
- Зенон Элейский (V – IV вв. до н.э.)
- Евклид (IV – III вв. до н.э.)
- Архимед (III в. до н.э.)

Индия ок. 7 в. н.э. - Ноль как число

- Брахмагупта - сделал попытку увязать понятия нуля и отрицательных чисел с арифметическими операциями



Арифметические действия с нулем

- Сумма нуля и отрицательного числа – число отрицательное, нуля и положительного – положительное, сумма нуля и нуля равна нулю.
- Если из нуля вычесть отрицательное число, то получим положительное, если вычтем из нуля положительное, то получим отрицательное. Если из нуля вычесть ноль, получим ноль.
- Положительное или отрицательное число, деленное на ноль, есть дробь с нулем в знаменателе. Ноль, деленный на положительное или отрицательное число, есть ноль, что можно выразить как дробь с нулем в числителе и ограниченной величиной в знаменателе. Ноль, деленный на ноль, дает ноль.

Брахмагупта

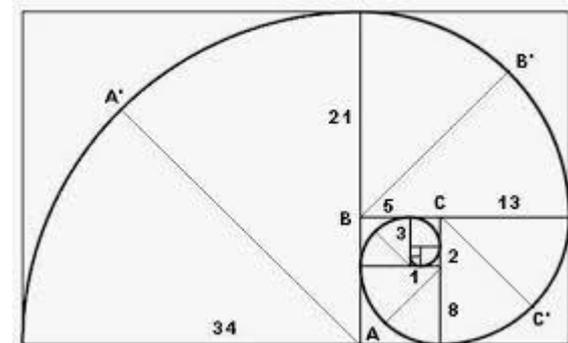
Фибоначчи (Леонардо Пизанский) – итальянский математик

- 1202 г. «Книга абака»
- 1-9 – числа
- 0 – знак

Ряд Фибоначчи (задача о кроликах) :

1, 1, 2, 3, 5, F_n, F_{n+1}, F_{n+2}

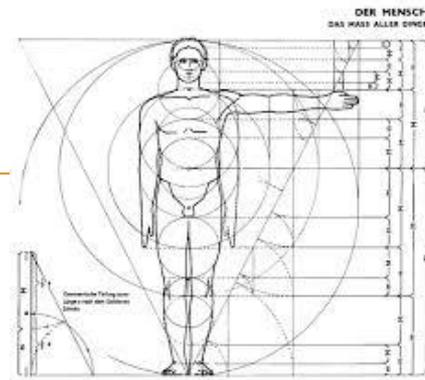
$F_n / F_{n+2} \rightarrow ?$



... а также

Решил задачи:

- определения объема цилиндра и шара, объемов частей параболоидов вращения,
- положения центра тяжести плоских и пространственных фигур и для многих случаев решил ее,
- применил в геометрии метод «мысленного взвешивания»,
- развил предложенный греческим ученым Евдоксом «метод исчерпывания», позволивший исследовать свойства кривых второго порядка.



Сформулировал основной вопрос философии математики: что есть число?

- Что такое единица, ноль, бесконечность ?
- сколько единиц существует ?
- как единицы можно складывать?
- что такое $1 + 1$ (что такое складывать предмет сам с собой)
- чем первая единица отличается от второй в равенстве

$$1 = 1$$

Выводы: Математический объект – абстракция от абстракции

- Математический объект – количественная характеристика множества предметов
- Число – абстракция от исходной абстракции (все «пятерки» – число 5)
- Формула – абстракция от числа

- количественные и пространственные отношения (А.Н. Колмогоров)

Как существует математический объект, представленный знаком?

- Реализм – «Математические объекты существуют **вне нас** в силу той же необходимости как и объекты реального мира» Ш.Эрмит
- К.Гедель, А.Колмогоров

- Номинализм – реальны только отдельные вещи, существует то, что имеет **пространственно – временную координату**.
- В.Куайн, Н.Гудмэн

Классификация математики

- Доаксиоматическая – аксиоматическая
- Формирование принципов построения дедуктивной теории

- Прикладная – теоретическая
- Математика:
 1. Язык науки
 2. Модель для количественного описания природного мира, социума и технических устройств

Принципы построения дедуктивных теорий

Дедуктивная теория – система, принципы которой выводимы из аксиом.

Составляющие аксиоматических теорий:

- Исходные понятия (объекты);
- Исходные утверждения, связывающие исходные понятия;
- Правила логического вывода

Требования к аксиомам:

- Непротиворечивость – два принятых исходных положения не должны противоречить друг другу.
- Независимость – аксиому нельзя доказать с помощью других аксиом.
- Полнота - все формулы данной системы выводимы по ее правилам и с использованием существующих в ней аксиом.

Пример аксиоматической системы:

- Механика И.Ньютона: закон инерции, закон пропорциональности силы и ускорения при постоянной массе, закон равенства действия и противодействия

Современные философские проблемы математики:

- XIX – XX вв. – проблема обоснования математики - вопрос о соотношении концептуальных математических построений и объективной реальности, которую они должны в конечной инстанции отображать.

Концепции математики XX в.

- Логицизм: (Г. Фреге, Б. Рассел и др.) - основания математики **в логике**;
- Интуиционисты (Я. Брауэр, Г. Вейль, А. Гейтинг, Л. Кронекер и др.) – математика **опирается на интуицию**;
- Формализм (Д. Гильберт, В. Аккерман, И. Бернайс, фон Нейман) – основания математики – **математические знаки**.

От математики к компьютерным наукам – все ли так?!

Аспекты «тривиальные» - за:

- Средство ускорения «механических» вычислений.
- Методы обработки данных, представленных в цифровой форме
- Средства управления и моделирования

Аспекты, требующие осмысления и более глубокого понимания

- «Книга природы» написана на языке математики (Г. Галилей), но не ясно какой математики ? Вычислительной ли?
- Законы физики не содержат «событий», в них нет информационного начала. Почему? Будет ли создана «физика мира мысли» ли физика потенциально возможного? («духи» $p < 0$, тахионы $v > c$)
- В чем «вычислительные машины» могут быть лучше, чем люди?
- Информационно-вычислительный натурализм – **вычисления vs понимание**; Непрерывное vs дискретное. Возможен ли компромисс?
- Неполнота и противоречивость формальных систем (Теоремы Геделя, информационный «пепел» и закон «исключенного третьего»)

«Сингулярность» , которая близка.....



- «Мы»:

Последнее поколение людей, физические возможности которых ограничены естественной морфологией человеческих тел и органов чувств и Первое поколение, для которого расстояние – «время доставки сигнала» , возможности ограничены лишь воображением.

«Сингулярность – это ближайшее будущее, когда скорость технического развития будет настолько высока, а изменения окружающего мира будут настолько фундаментальными, что кардинально изменят существование людей». В итоге «ментальность будет управлять реальностью , другими словами - **киборгизируйся или умри ; -)**