КАФЕДРА ТЕЛЕМАТИКА

Санкт-Петербургский Государственный Политехнический Университет

Институт прикладной математики и механики

Научный дискусс «Может ли машина мыслить»

Лекция 3

Обобщения теоремы Геделя

28 сентября 2017 г.

Вклад Геделя в компьютерные науки

Методы, созданные Геделем, заложили основу современных компьютерных наук, благодаря тому, что дали «точное определение алгоритма», обосновав то, что возможности описания реальности с помощью формальных методов ограничены :

«формальный идеал»	«реальность »
Число -	слово,
Математическая модель -	дефиниция,
Представления -	ощущения
Рационально -	разумно

…

Еще раз про связь теоремы Геделя с проблемой «мышления машин»

Теоремы Гёделя о неполноте относятся к классике математической логики но затрагивают вопросы, далеко выходящие за пределы собственно математики.

Суть теорем связан с теорией т.н. вычислимых функций и модально-логическими свойствами формул, выражающих доказуемость того или иного математического утверждения, в том числе на основе эффекта самоописания.

О чем идет речь

Простейшая формулировка первой теоремы Гёделя **о неполноте** говорит о том, что существует предложение, не доказуемое и не опровержимое в рамках рассматриваемой теории P.
Вторая теорема Гёделя утверждает, что в качестве такого предложения можно взять формализацию утверждения о ее собственной непротиворечивости.
Это ставит под сомнение возможность реализации так называемой программы Гильберта, декларированной целью которой было установление непротиворечивости математики (анализа и теории множеств) **финитными** средствами.

Итак: **финитные** доказательства **формализуемы**

В суть проблемы «финитности» ?

Неполнота какой-либо конкретной теории, например Р, может означать всего лишь, что “не были учтены” какие-то нужные аксиомы.
(например, так обстояло долгое время дело с аксиоматизацией элементарной геометрии).
В принципе аксиоматику теории можно пополнить. Но Гедель доказал, что мы имеем дело с драматичной ситуацией, которая говорит о принципиальной **непополняемости** системы (языка) Р.
Теорема Гёделя о неполноте может быть сформулирована следующим образом.
Пусть Т – формальная теория, удовлетворяющая следующим условиям:
(i) Т сформулирована с использованием системы Р;
(ii) Т получается добавлением к системе Р **рекурсивного** (т.е получаемого спосмощью некоторого алгоритма) множества аксиом;
(iii)Т является в Р непротиворечивой.

Тогда Т неполна, т.е. существует предложение φ, для которого ни φ, ни ¬φ не доказуемы в Т.

Арифметизация логики как научная основе технологии ИИ

Гедель предложил способ кодирования натуральными числами (т.н. гёделева нумерация) объектов системы (языка) P, таких как переменные, термы, формулы и т. д. и показал, что при некотором естественном выборе такого кодирования отношение “**X** есть код вывода формулы с кодом **y** в системе P ” будет примитивно рекурсивным, т.е. вычислимой.

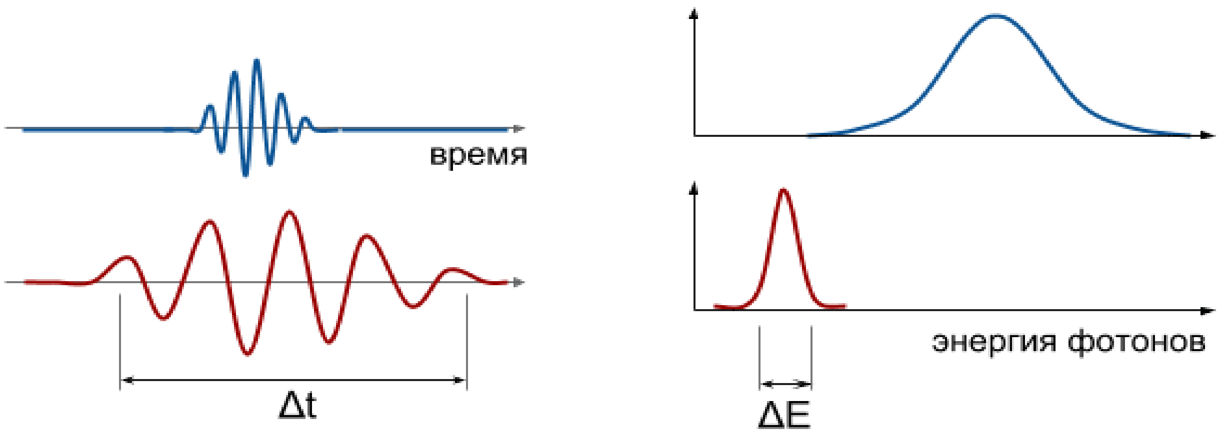
Требование (ii) является достаточно общим и для всех формальных теорий, рассматриваемых на практике, выполняется. Так этому условию заведомо удовлетворяют теории, задаваемые конечным числом аксиом, что позволяет назвать эти теории рекурсивно аксиоматизированными (т.е построены на алгоритмах)

Итак, Гёдель доказал, что некоторое построенное независимое предложение для теории T, каким бы ни был язык самой теории T , относится **к элементарной арифметике**.

Алгоритмизируемо ли соотношение неопределенностей

Призрачно всё В этом мире бушующем,
Есть только миг, За него и держись. …

Слова: Дербенев Л.
Музыка: Зацепин А.



Соотношение неопределенностей энергия–время для фотонов: чем короче световой импульс, тем больше разброс энергий у фотонов: $\Delta t \cdot \Delta E \sim \hbar$, где $\hbar$ — постоянная Планка, $\hbar \approx 10^{-34}$ Дж·с.

Чтобы «реальность» длилось время t, нужно, чтобы «реальность» обладала энергией как минимум равной $\hbar$/t.

Что будем обсуждать на лекции: соотношение «реальность vs виртуальность»

Из соотношения неопределенности Гейзенберга следуют радикальные выводы:

- существуют «виртуальные» объекты физической реальности, которые не могут быть зарегистрированы-измерены классическими измерительными приборами, например, счётчиком элементарных частиц, но только с «их помощью» возможно «физически» объяснить процессы переноса энергии и законы сохранения.
- Итак, скорость и масса виртуальных частиц не имеет физического смысла, но они … объекты «модели» реальности.
- Виртуальные процессы, которые происходят в промежутки времени порядка 10^{-24} сек, и в силу соотношения неопределенности, для энергии и времени такие процессы принципиально не могут наблюдаться.
- Виртуальные частицы и процессы «ненаблюдаемы», образуя «вакуум» физической реальности, которые входят в «научную модель мира».

«Вакуум» понимания: «Истина всегда рождается как ересь, а умирает как предрассудок» (Гегель).

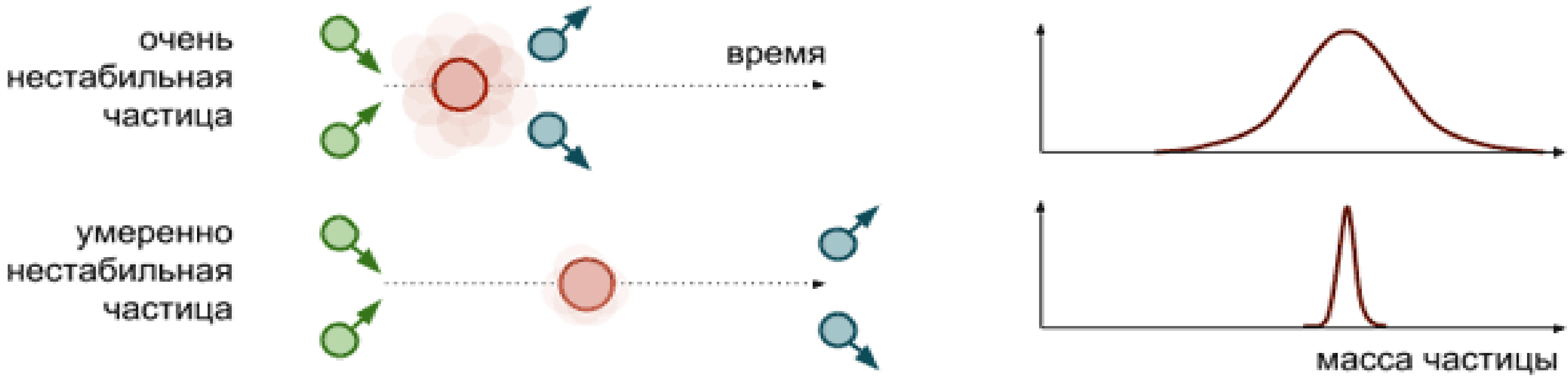
Сколько событий, которые есть часть физической реальности, имеют вероятность «ноль» ?

Итак, законы «реальной» физики имеют «масштабы», а вычислительные модели «абсолютны». Числа и виртуальные частицы являются переносчиками взаимодействия «физического вакуума».

Термин "физический вакуум", можно понимать как средоточие виртуальных объектов, непрерывно рождающихся на короткие мгновения и тут же исчезающих квантовых флуктуаций.

Квантовые флуктуации вакуума создаются нулевыми колебаниями электромагнитного поля, … Ноль не наблюдаем, но виртуальные частицы могут оказывать действие на внесённые в вакуум реальные объекты.

Энергия и информация



Чем меньше длится явление, тем более высокие энергии должны в нём участвовать. Чем меньше «живет» частица — тем больше у нее разброс массы. Значения энергии нестабильных частиц намного больше тепловой энергии частицы при комнатной температуре (300 К ≈ 0,025 эВ) и энергий фотонов видимого света (2–3 эВ).

Потеря информации

В любой вычислительной системе, независимо от её физической реализации, при потере 1 бита информации выделяется теплота в количестве по крайней мере W джоулей:

$$W = k_b\, T \ln 2$$

Где - k_b постоянная Больцмана; T – абсолютная температура.

Компьютеры при обработке одного бита рассеивают примерно в миллион раз больше тепла, чем предсказано принципом.

Что делать ?

Мир виртуальных объектов и подходы к его координатизации:

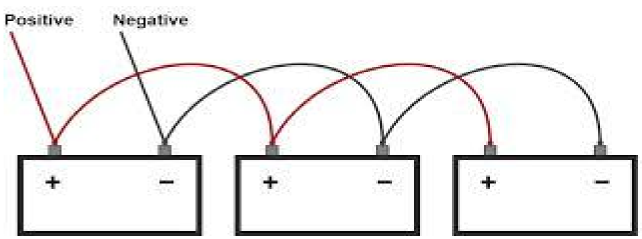
«Все числа состоят из некоторого количества единиц» Диафант,

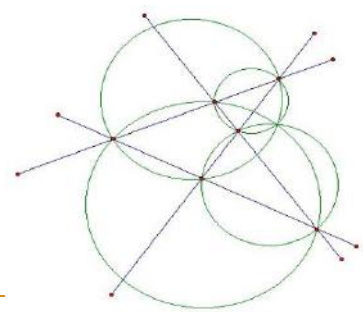
- Идея координатизации : использование множества «числоподобных» объектов – носителей операций для описания свойств физических объектов или процессов
- «Координаты» объектов должны обладать некоторыми свойствами общего характера, вытекающими из принципов:

- Индивидуализации
- Абстракции (обобщения)
- Порождающих операций

Конструирование новых «чисел» - координат

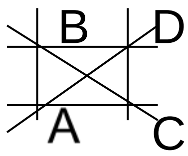
- Новые типы «координатизирующих» величин создаются на основе принципов, изучаемых в алгебре. Для этого требуется:
  - Создание нового класса алгебраических объектов
- Классы задаются на базе выбранной группы аксиом, которая допускает много «физических интерпретаций»





Координатизация аксиом соединения и параллельности

Объект X:



Что имеем 4 точки: A, B, C, D и 6 прямых: AB,DC,AD,BC,AC,BD

Сколько нам надо координат ? Введем «несущее» множество {Ч, Н} и операции {+, *}

+	Ч	Н
Ч	Ч	Н
Н	Н	Ч

*	Ч	Н
Ч	Ч	Ч
Н	Ч	Н

Итого: пара величин Ч и Н с операциями + и х основа для «геометрии»

Точки-координаты: A ->(Ч,Ч), B -> (Ч, Н), C - > (Н, Ч), D -> (Н,Н)

Уравнения прямых, образованные из двух величин Ч и Н: AB: НХ=Ч; CD: НХ=Н, …… BD: НY=Н

Требования к системам координатизации

Принципы построение «объектов» для координатизации :

- задано «несущее» множество , из элементов которого могут быть построены объекты для координатизации,
- Задано множество «операций», над элементами,
- Применяя «операции» к элементам множества можно «строить» новые элементы-объекты для координатизации изучаемых объектов.

Какие могут быть множества, элементы которых используются для координатизации ?

ПОЛЕ. Множество, на котором определены две операции «сложение» а+в и «умножение» а*в, прочем а+в=в+а, а*в=в*а. Существует элемент «1» и «0», такие что а*1=а, а+0=а, имеет элемент a^{-1} такой что $a*a^{-1}=1$, а+0=а.
Поля К и К' могут быть «изоморфными» – их таблицы «умножения» и «сложения» совпадают
КОЛЬЦА. Тоже, что и «поле» за исключение требования существования a^{-1}

- Коммутативное кольцо целых числе Z,
- Кольцо многочленов A[x] с коэффициентами в кольце А
- Целостное кольцо: а*в=0б если а=0 или в=0, причем 0#1

Свойства систем координатизации: гомоморфизмы

Гомоморфизм – это отображение f: A->B кольца A в кольцо B такое , что:

f(a+b)=f(a)+f(b)
F(a*b)=f(a)*f(b)
F(1_A)=1_B

Пример. Если x0 точка на кривой C, то сопоставление каждой функции К(C) ее значения в точке x0 определяет гомоморфизм К[C] -> K/.

Значение функции в точке можно интерпретировать как гомоморфизм, поэтому коммутативное кольцо может быть интерпретировано как кольцо функций на множестве, точки которого соответствуют гомоморфизмам исходного кольца в поле.

Итого: каждый геометрический объект координатизируем некоторым кольцом функций на нем и
Любое кольцо координатизирует какой-то геометрический объект.

Операции, которые «пока» могут быть строго алгебраизированы

Прямое восприятие как вид высших умственных операций стоится на базе операций, которых не «координатизируются», а именно :

- качественное сравнение
- анализ,
- синтез,
- индукция,
- дедукция.

Для этих понятий нельзя ввести свойства гомоморфизма, следовательно нельзя построит ядро гомоморфизма, ввести понятие идеала, модуля (обобщения векорного пространства) и пр.

Обобщения

В понятии «числа»-координаты присутствует некая тройственность:

- число как некий объект
- число как способ записи свойств (синтаксис объекта)
- семантика числа (количество, мера, величина)

Можно показать, что позиционное представление числа равнозначно всем другим представлениям чисел.
Поэтому компьютерная модель чисел отвечает определению:
«Все числа состоят из некоторого количества единиц»

Диафант,

Компьютерная арифметика

Модели компьютерных чисел:

- Реализация арифметических операций в компьютере связана со способом кодирования чисел
- Компьютерное представление целых числе возможно с точностью до величины 2^n-1, n – число разрядов регистра представления числа.
- Арифметические операции в компьютере происходят в кольце вычетов Z_N по модулю N= 2^n-1

$$x+y=|x+y|_N$$

$$x*y-|x*y|_N$$

Любая компьютерная арифметика на регистровом уровне реализуется над вычетами, как целыми числами, которые не должны выходить за «диапазон» Z_N={x из Z , где $0<x<N$}

Абстракции, классы и проблема «интерфейсов»