



Санкт-Петербургский
Государственный
Политехнический
Университет

Институт прикладной
математики и механики

История и методология компьютерных наук

Лекция 3

**Вычислительные модели научных
знаний – «существует то, что
МОЖНО ВЫЧИСЛИТЬ».**

27 Сентября 2016 г.

План лекции

- Окружающий мир как система. Математические системы описания реальности: алгебра, топология, отношения порядка.
- Теорема Геделя. Алгебраическая система. Координатизация.
- Информационно-вычислительный натурализм.

Рассматриваемый методологический принцип

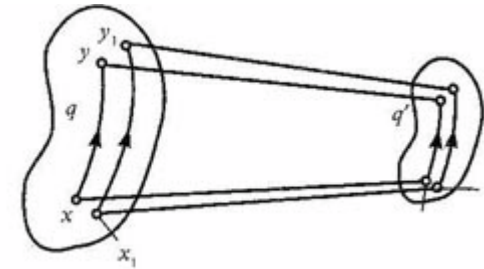
- Суть системы – это процессы и структура
- Объекты – это предельные состояния процессов, изменения которых ограничены структурой системы
- Процессы можно ощущать, сравнивать и измерять
- Результаты измерений можно записать с помощью чисел
- Числа можно хранить, передавать и производить с ними операции.

Феномен системы - уточнения

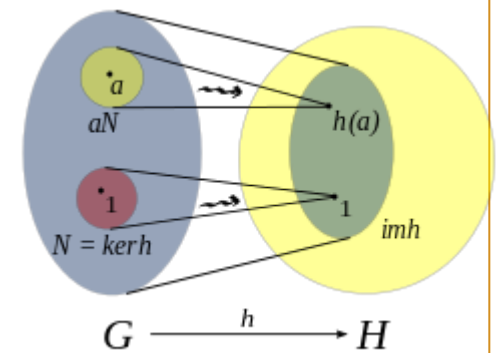
-феномен системы связан с тем, что «Мир» есть носитель структуры. Существуют законы «движения» объектов Мира – это процессы, которые не изменяют структуру.
- Другими словами, структура системы инвариантна к изменениям, которые следуют определенным законам. Задача науки – открыть эти законы !?
- **Координатизации** - суть процесса построения «модели мира» или отображения (гомоморфизм) объектов Мира на числоподобные множества ?

Пояснения - греч. *isos* одинаковый, *homoios* подобный и *morphe* форма

- **Изоморфизм** Две системы, рассматриваемые отвлеченно от природы составляющих их элементов, являются изоморфными друг другу, если каждому элементу первой системы соответствует лишь один элемент второй и каждой связи в одной системе соответствует связь в другой и обратно



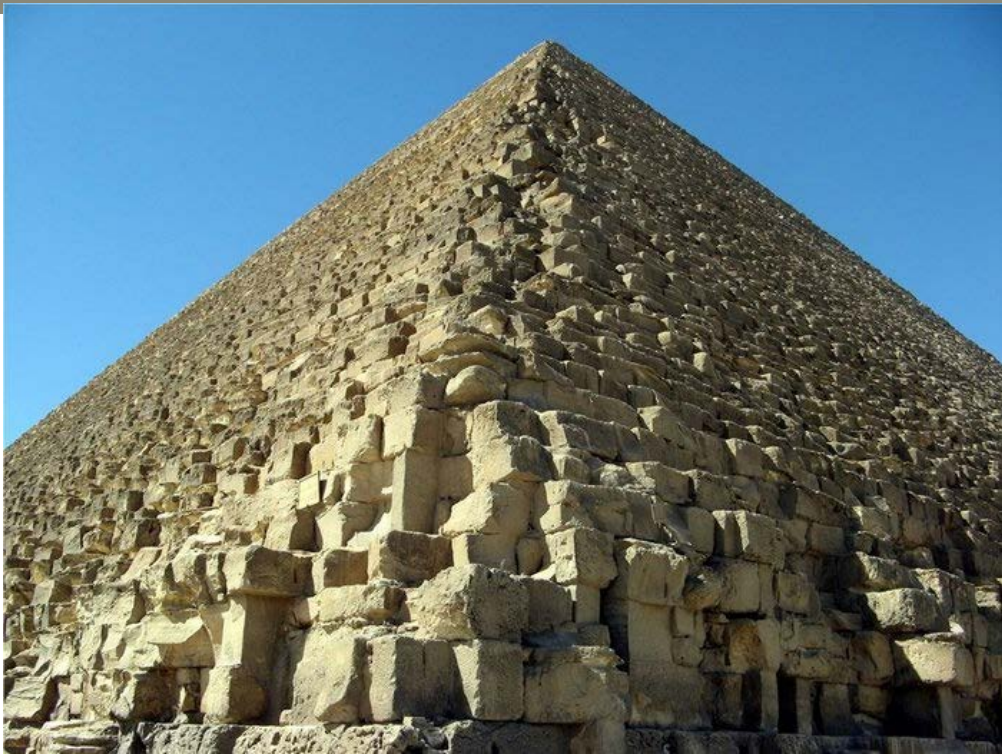
- **Гомоморфизм** отличается от ИЗОМОРФИЗМА тем, что соответствие объектов (систем) однозначно лишь в одну сторону (напр., отношение между картиной и местностью, между грамзаписью и ее оригиналом звуковыми колебаниями воздушной среды.



Формальные признаки системы

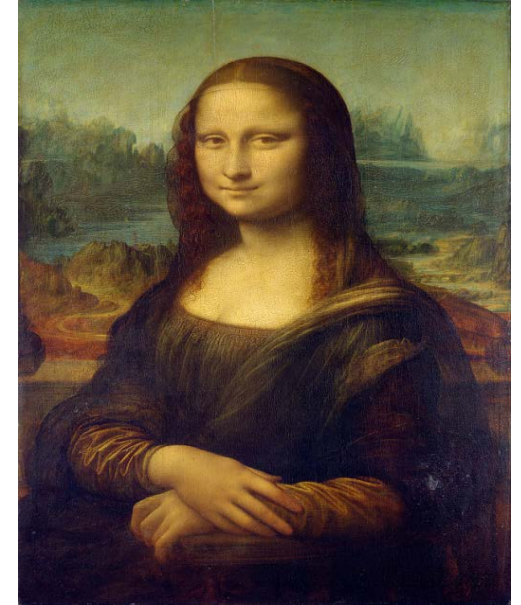
- **Целостность.** Элементы, входящие в систему могут различаться по функциям и свойствам, но при этом они являются совместимыми, и функционируют, как единое целое.
- **Связанность.** Элементы взаимосвязаны и эти связи «сильнее» связей этих же элементов с внешней средой.
- **Эмерджентность.** Система может обладать свойствами неприсущими ни одному элементу системы.
- **Синергия.** Функциональность системы превосходят «суммарные» возможности всех элементов системы.

Мир как система



Модели мира это:

Системное
описание
неоднородности
распределения
энергии и
вещества в
пространстве и
времени



Теорема Геделя о неполноте формальных систем

Формулировка: «Логическая полнота или неполнота любой формальной системы (системы построенной на основе аксиом) не может быть доказана в рамках этой системы. Для доказательства или опровержения требуются дополнительные аксиомы (усиление системы)».

или так – «Всякая система математических аксиом начиная с определенного уровня сложности либо внутренне противоречива, либо неполна».

- Следствие - доказательство принципиальных различий между человеческим мозгом и компьютером. Компьютер действует строго логически и не способен определить, истинно или ложно утверждение A , если оно выходит за рамки аксиоматики. Человек же, столкнувшись с логически недоказуемым и непроверяемым утверждением A , всегда способен определить его истинность или ложность — исходя из повседневного опыта или интуиции

Неполнота – это

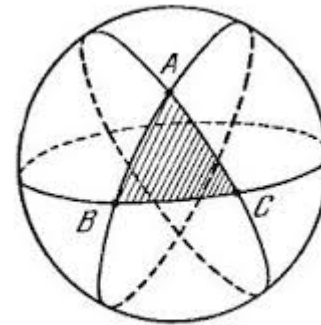
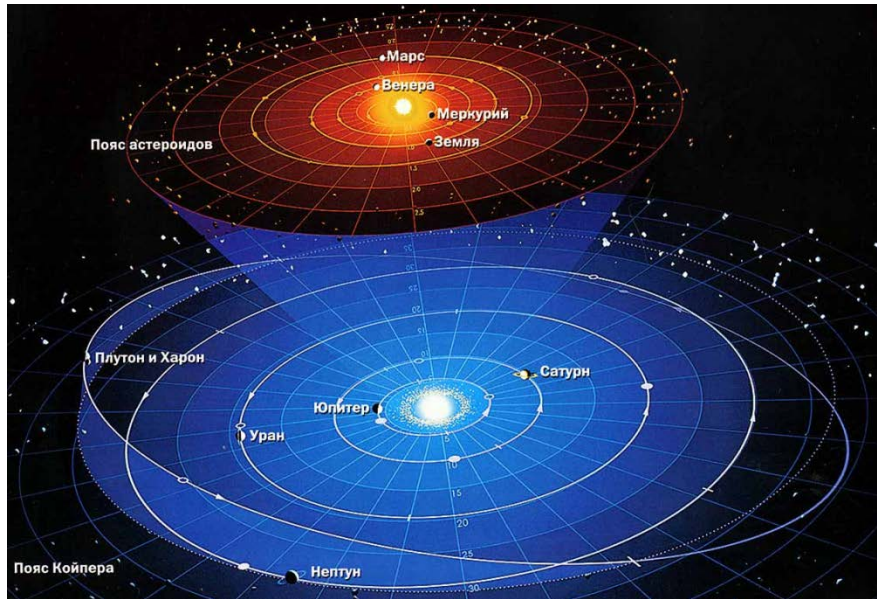


Рис. 2.

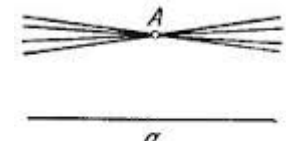


Рис. 14.



Конструкция формального языка, которая не может быть однозначно разобрана:

if A then if B then C else D

Неоднозначность расстановки скобок и является причиной появления противоречий



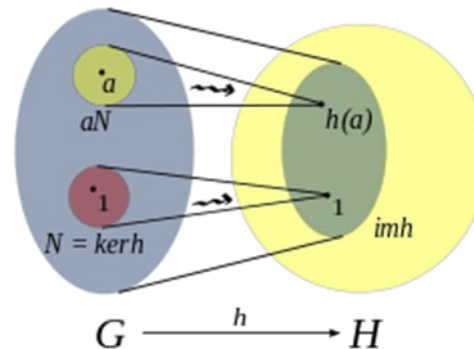
Алгебраическая модель мира – упрощение, исключаящее неоднозначность

- Человек может ориентироваться во внешнем мире, опираясь геометро-алгебраический дуализм:
 - 1) **на органы чувств**, опыт манипулирования предметами и интуицию.
 - 2) **измеряя субъективные ощущения**, т.е. превращая их в знаки – числа, которые способны сохраняться, передаваться другим лицам, «вычислять» новые данные о предметах, бывших объектом измерения
- Трудности моделирования возникают при попытке характеризовать любое явление при помощи общих свойств. Например, нельзя дать «определение» **конкретного человека**, но можно указать его «**паспортные данные**» или указать несколько типовых случаев из его биографии (окончил школу, университете, военную академию).
- Выбирая путь 2) – мы выбираем алгебру. Галилей сформулировал идею координатизации - **измерять все, что измеримо, и делать измеримым все, что таковым еще не является .**

Как можно выразить результат измерения?

- Известными числами (\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q})
- Расширением чисел (\mathbb{R} , \mathbb{C})
- Числоподобными объектами – векторами, матрицами, кватернионы, алгебры, операторы, p -адическими числами.

Итак, мир числоподобных объектов так же многообразен как и мир физических объектов. Тем не менее их отображение есть гомоморфизм



Объекты, служащие координатами, должны быть индивидуализируемыми, достаточно абстрактны, отражать свойства, общие широкому кругу явлений, но ... в Мире есть объекты и понятия, **которые «измеримыми» быть не могут**

Существует изоморфизм понятий

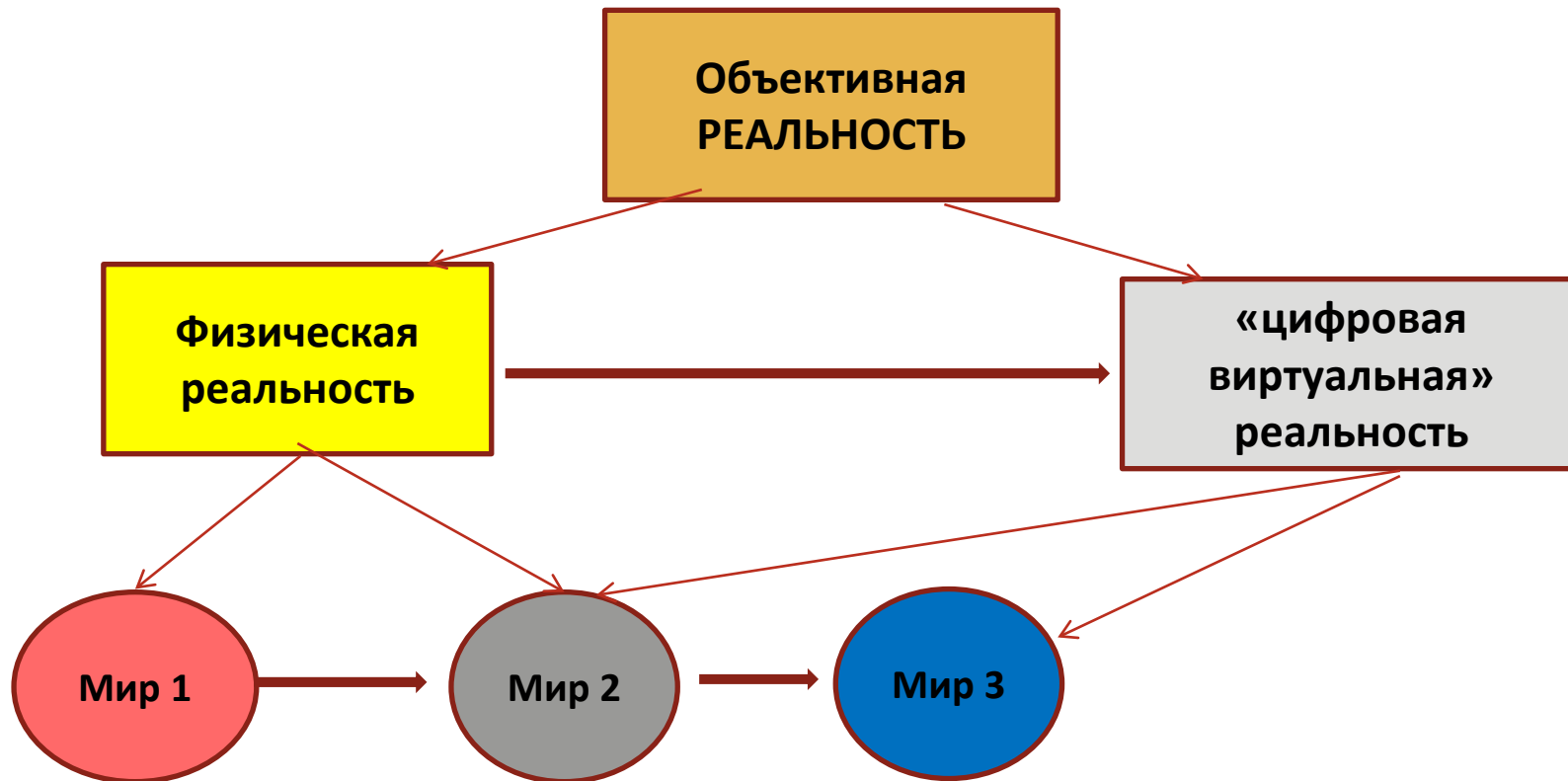
Физические понятия	Математические понятия
Состояние физической системы	Прямая в бесконечномерном комплексном гильбертовом пространстве
Скалярная физическая величина	Самосопряженный оператор
Одновременно измеримые величины	Коммутирующие операторы
Величина, имеющая точное значение x в состоянии f	Оператор, для которого f –собственный вектор с собственным значением x
Множество значений величины, которые можно получить путем измерения	Спектр оператора
Вероятность перехода из состояния f в состояние q	$ (f,q) $, где $ f = q =1$

Модели реальности К. Поппера:

- Физический мир (Мир-1) **порождает** Ментальный мир (Мир-2)
- Ментальный Мир **порождает** Мир идеальных объектов (Мир-3) (или мир продуктов сознания)

Мир-3 является **трансцендентным** (то есть находится вне физической реальности, являясь виртуальной цифровой сущностью), но обладает функциональной автономностью и **способен к саморазвитию (Самоорганизации) за счет «вычисления» потенциально возможных состояний (!?)**.

Концепция « кибер-физической реальности » информационно-вычислительный натурализм



Физический мир (мир 1 физических объектов); Ментальный мир (мир 2 сознания человека); Мир идеальных объектов (мир 3 объективного знания о свойствах реальности).

Итак, система – это.....

- четко упорядоченная совокупность нескольких элементов, которые представляют собой **единое целое**, а все элементы системы подчиняются **законам** и взаимосвязаны через введенную систему координат (координатизацию)

Примеры:

математическая система

физическая система

Нервная система

....

Язык для описания алгебраических систем:

- Одним из важнейших языков для выражения свойств **алгебраических систем** является язык тождеств. Тождеством называют **равенство буквенных выражений**, справедливое при всех значениях входящих в него букв.
- Понятие тождества является уникальным по "дистанции" охватываемых свойств: от тривиальных фактов до научных проблем.

Что определяют тождества

Тождества задают **свойство операций** (сложения и умножения) над элементами несущего множества, например, **переместительный** закон :

$$x + y = y + x, x \cdot y = y \cdot x. \quad (1)$$

к этому закону добавляется **сочетательный**, означающий выполнение свойства ассоциативности:

$$(x + y) + z = x + (y + z), (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z). \quad (2)$$

и распределительный закон, означающий выполнение дистрибутивного закона

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x. \quad (3)$$

Указанные тождества распространяются на целые числа, рациональные, действительные числа. Итак, основные типы алгебраических систем и определяются в терминах тождеств.

Примеры

Полугруппа - это множество с одной ассоциативной операцией; если эта операция обозначена символом \circ , то ассоциативность означает выполнение тождества

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$

В частности, если такая операция названа сложением [умножением], то полугруппа определяется первым [вторым] из тождеств (2); Так, множество всех натуральных чисел \mathbb{N} является полугруппой и относительно сложения, и относительно умножения.

Группа может быть определена как полугруппа (с операцией, обозначенной, скажем, символом \circ), на которой задана дополнительная операция, сопоставляющая любому элементу x элемент, обозначаемый x' , причем кроме тождества ассоциативности выполнены тождества

$$x \circ x' = x' \circ x, (x \circ x') \circ y = y \circ (x \circ x') = y.$$

Группой, например, будет **множество всех целых чисел**, если в качестве операции \circ взять **сложение**, а роль x' будет играть **элемент -x**.

Примеры

Кольцо определяется как множество с двумя операциями, называемыми обычно сложением и умножением, и дополнительной операцией, сопоставляющей любому элементу x элемент $-x$, причем относительно сложения и указанной дополнительной операции это группа, сложение коммутативно, т. е. выполнено первое из тождеств (1), а сложение и умножение связаны тождествами дистрибутивности (3).

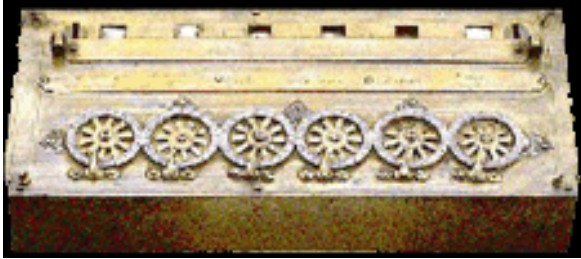
Простейший пример кольца - **множество всех целых чисел Z** относительно обычных операций сложения и умножения.

Итак, из любого тождества, выполняющегося в данной алгебраической системе, можно вывести бесконечно много других тождеств, выполняющихся в той же системе. **Вопрос** - могут ли все тождества, выполняющиеся в данной алгебраической системе, быть выведены из **конечного числа таких тождеств**.
Это так называемая проблема конечного базиса .

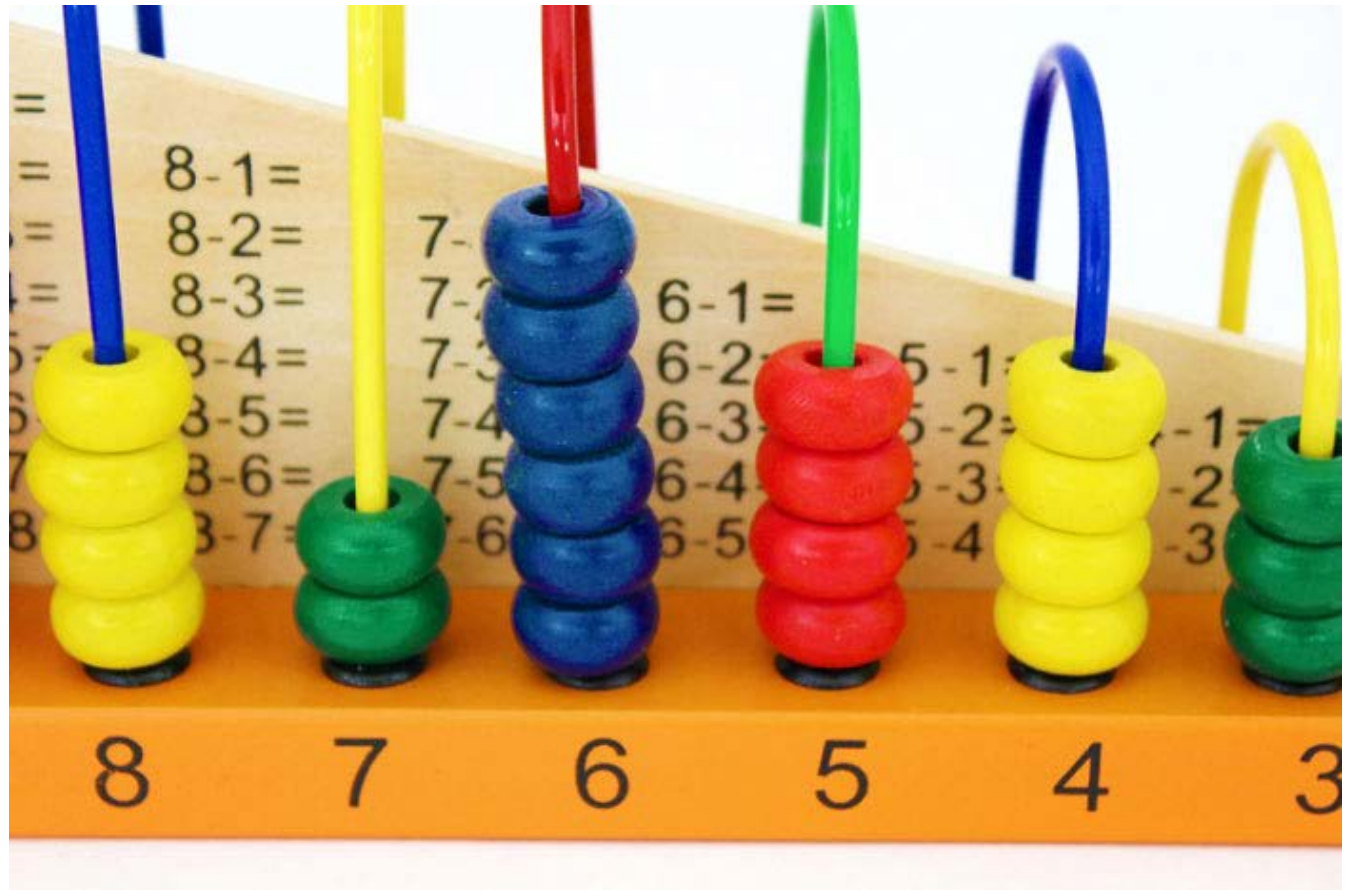
Многообразия как объект образованный тождествами

- Многообразием принято называть всякий класс **алгебраических систем**, который может быть задан некоторой совокупностью тождеств.
- Важными примерами многообразий являются класс всех полугрупп, **класс всех групп, класс всех колец**. У каждого из них имеется бесконечно много подклассов, также являющихся многообразиями; они называются подмногообразиями.
- Подмногообразия любого многообразия образуют так **называемую решетку** (определение решетки также может быть дано на языке тождеств). всякое линейно упорядоченное множество; если $a \leq b$ то $\sup (a , b) = b$;

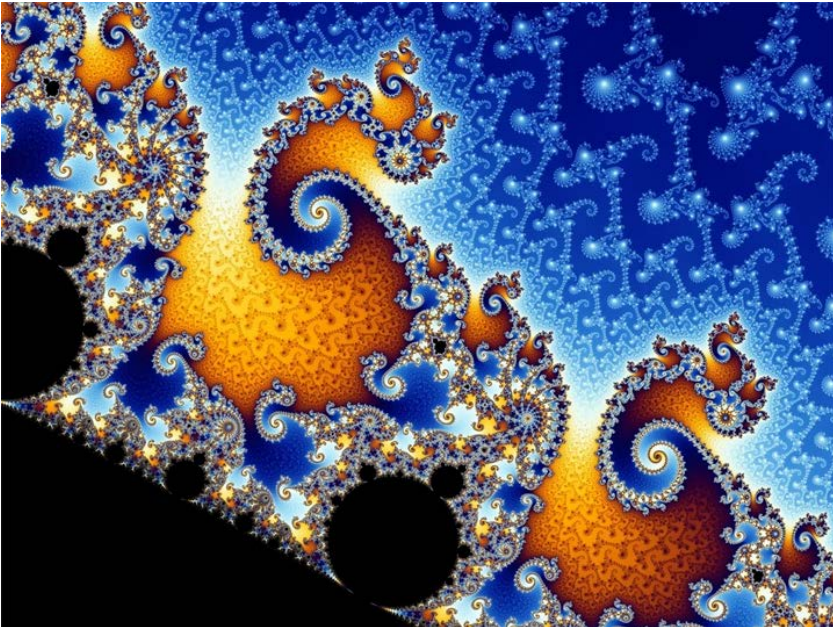
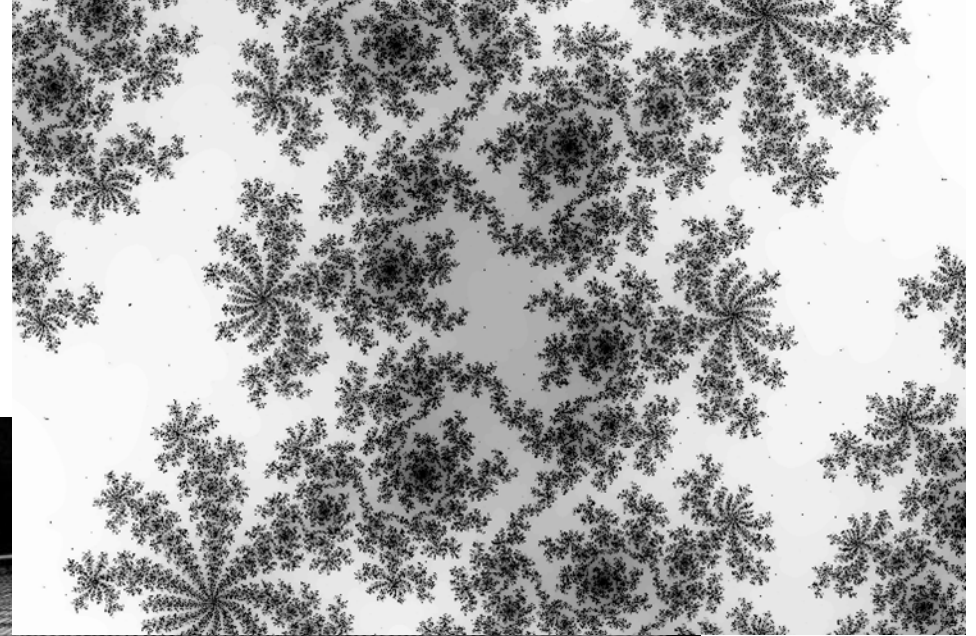
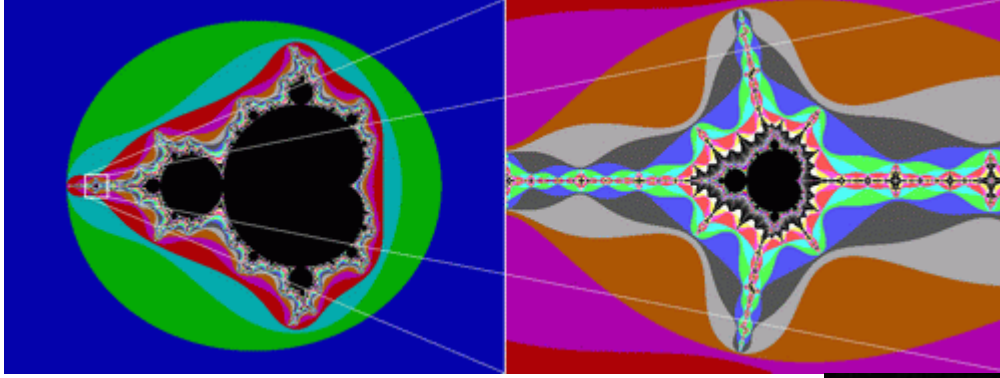
Арифметические кольца



«Колеса Паскаля»
(Blaise Pascal,
1623-1662) с
помощью которых
можно было
производить
арифметические
операции



Алгебраические группы – модели симметрии Мира



Выводы: Мир как динамическое множество (множество объектов и процессов)

- Итак, в универсальной алгебре — множество G с заданным на нём набором операций ($+$, $-$, $*$, $/$..) и отношений ($>$, $<$, $=$...) удовлетворяющая некоторой системе аксиом называется алгебраической системой (алгебраической структурой)
- Пример: Множество N всех натуральных чисел можно рассматривать как алгебраическую систему с одной операцией сложения;
или с одной операцией умножения;
или с набором из двух указанных операций;
или, с набором, который состоит из двух указанных операций и бесконечного множества операций возведения произвольного числа во всевозможные степени с натуральным показателем.

.....

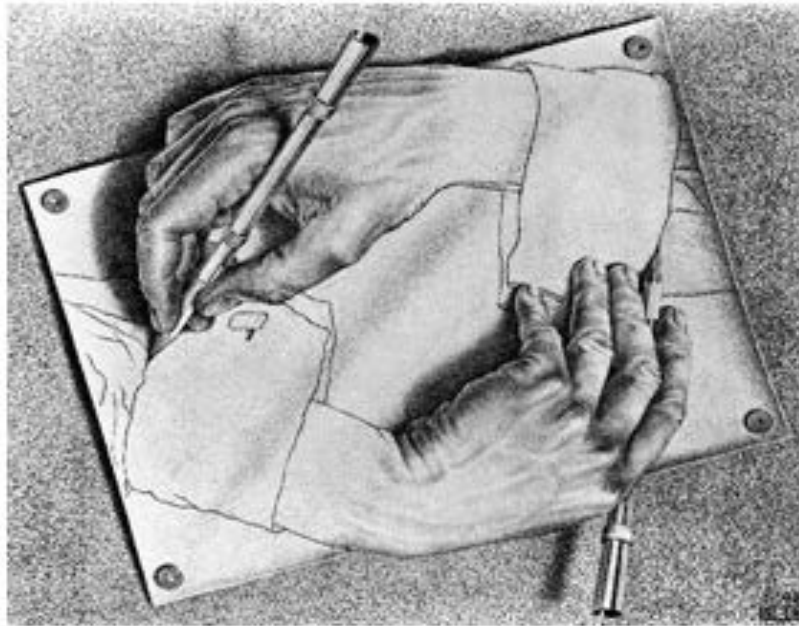
Таким образом, одно и то же множество (в данном примере - N) может быть превращено в разные алгебраические системы.

Операции в алгебре и в реальном мире

- Алгебраические операции естественно рассматривать не только на числовых множествах, но и, например, на множествах векторов, функций, матриц, цепочек сигналов и многих других множествах, служащих «координатами» объектов реальности.

ИНФОРМАЦИЯ в Математических и реальных СИСТЕМАХ

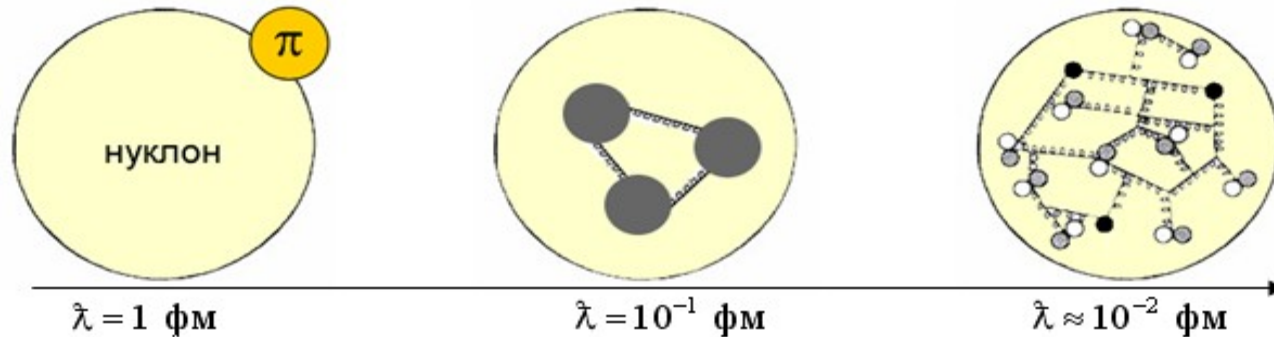
Картина Эшера рисующие руки



Пример взаимного сосоздания и циркулярной причинности.
Метафора странной петли Хофштаттера

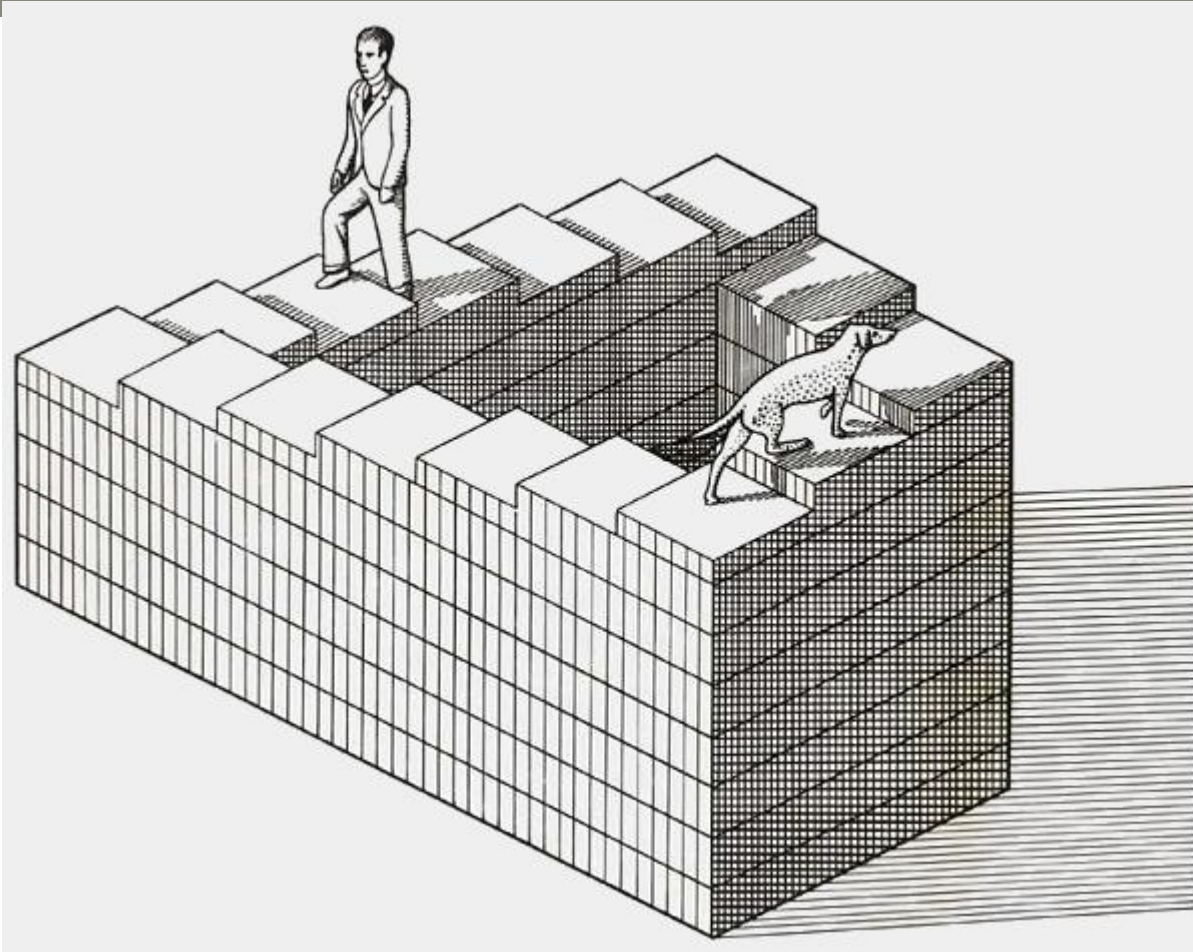


Точность «информации» - конечная величина



- Структура , объекта, которая открывается /получается в результате измерения, «зависит» от того каков масштаб меры, т.е. результат «координатизации» и зависит от того кто и как смотрит на объект! (мера – это длина волны фотона, от его частоты зависит точность)

Информационно-вычислительный натурализм



Реально существует то, что вычислимо ! ? ? , а
вычисления – результат координатизации реальности.



Современная Модель Мира



Разлет во тьму

Во Вселенной преобладает загадочная темная энергия, сохраняющая постоянную плотность и действующая как антигравитация — сила взаимного отталкивания материи. Пространство расширяется все быстрее. Материя разрежается. Так будет продолжаться целую вечность. Но в конце концов все материальные структуры расплывутся.

Через 10¹⁰⁰ лет

В мировом пространстве сохраняются только сверхдлинно-волновое электромагнитное излучение и элементарные частицы типа электронов и нейтрино. Температура в абсолютно темной и невероятно раздувшейся Вселенной приближается к абсолютному нулю.

Через 10¹⁰⁰ лет
Происходит распад плотной — «сгустки кирпичиков» ядер атомов. В массе остаются лишь черные дыры. За счет квантовых эффектов они тоже испускают энергию в процессе вращения и медленно испаряются.

Через 10¹⁴ лет

Вселенная наполнена только черными дырами и «остатками» звезд нейтральных звезд, коричневых и белых карликов. Времени от времени при столкновении двух коричневых карликов темное пространство озарит вспышка нового светила.

Через 10¹¹ лет

(сто миллиардов) лет
Разноименная темной энергией скопления галактик разлетаются за пределы видимости.

Наше время

Пик Звездной эры

13,2 миллиарда лет назад

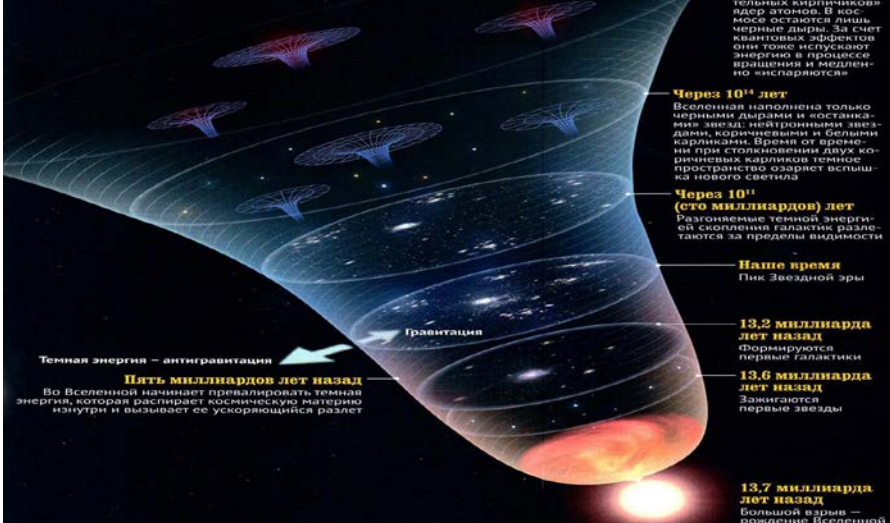
Формируются первые галактики

13,6 миллиарда лет назад

Занигаются первые звезды

13,7 миллиарда лет назад

Большой взрыв — рождение Вселенной



Т.М. - гипотетическая форма материи, которая не испускает электромагнитного излучения и напрямую не взаимодействует с ним